ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ИМ. А.М. ПРОХОРОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

УДК 535.1

Винцкевич Степан Викторович

ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНАЯ МАССА КЛАССИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ИЗЛУЧЕНИЯ И ПЕРЕПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ БИФОТОНОВ

Специальность 01.04.21 —
«Лазерная физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Фёдоров Михаил Владимирович

Москва — 2019

Оглавление

Стр.

Введение 4

Глава 1. Лоренц-инвариантная масса и эффект замедления на примере Гауссова электромагнитного импульса. 22

1.1 Многомодовые когерентные состояния 22

1.2 Классическая модель электромагнитного импульса. 26

1.3 Сравнение классического и квантовомеханического описания Гауссовго электромагнитного импульса. Расчёт Лоренц-инвариантной массы. 28

1.4 Средняя скорость распространения, эффект замедления и «система отсчёта покоя» электромагнитного импульса. 33

Глава 2. Эффект замедления классических в вакууме. Геометрический подход. Лоренц-инвариантная масса и эффект замедления электромагнитных импульсов в вакууме с нетривиальной пространственной конфигурацией (структурированный свет). 40

2.1 Дифракция как причина эффекта замедления электромагнитных импульсов в вакууме. Геометрический подход. 40

2.2 Лоренц-инвариантная масса классических электромагнитных импульсов. 49

2.3 Лоренц-инвариантная масса и эффект замедления структурированных импульсов. 53

Глава 3. Лоренц инвариантная масса и перепутывание бифотонных состояний. 65

Глава 4. Режимы спонтанного параметрического рассеяния света и квантовая интерферометрия 72

Заключение 98

Поддержка и благодарности 99
4.1 Персональные Благодарности 99

Список сокращений и условных обозначений 100

Список литературы и публикации автора по теме диссертации . 101

Приложение А. Результаты моделирования распространения в вакууме локализованных электромагнитных импульсов и расчёта их Лоренц-инвариантной массы, а также средней скорости распространения. 113

Введение

Распространение импульсов света в вакууме - очень хорошо изученный физический процесс. Основные особенности и характеристики импульсов света подробно описаны и исследованы как теоретически, так и в эксперименте. Плоская волна - элементарная модель электромагнитного поля, распространяющего в свободном пространстве со скоростью света в вакууме ($c = 299792458$ м/с). С другой стороны, плоская электромагнитная волна не является реальным физическим объектом, а только лишь идеализацией, так как имеет бесконечную протяженность в пространстве и длительность. В реальном эксперименте приходится иметь дело с импульсами электромагнитного излучения, занимающими конечный объём в пространстве и во времени. Более того, уже достаточно давно существует активно развивающаяся область оптики, изучающая импульсы со специфической пространственно-временной структурой (структурированный свет), придающей таким импульсам уникальные свойства. Детальное описание современного состояния данной области приведено, например, в обзорах [1; 2]. Эта область оптики имеет обширные практические применения в обработке квантовой информации и квантовой коммуникации [3—5], контроле состояний атомов и частиц [6—10], микроскопии [11] и продолжает стремительно развиваться. Тем не менее, существует вопрос о скорости распространения локализованного импульса света в вакууме, который представляет как фундаментальный интерес, так и практическую значимость. В настоящее время этот вопрос активно изучается и по-прежнему актуален.

Существует несколько различных способов определения скорости ЭМИ, в зависимости от интересующих свойств импульса света. Так, например, в работах [12—17] фазовая скорость монохроматического пучка определена следующим выражением [18]:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{|\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})|}, \tag{1}$$

где ω - частота, $\Phi(\vec{r})$ - функция, описывающая зависимость фазы пучка от пространственных координат. Так как ЭМИ имеет конечную длительность, что предполагает вклад многих частотных компонент, в этом случае $\Phi(\vec{r}) \to \Phi(\vec{r},\omega)$.

Часто в качестве скорости распространения импульса используется групповая скорость v_{gr}, как обобщение формулы (1):

$$v_{gr} = \frac{1}{|\partial_\omega \vec{\nabla}\Phi(\vec{r})|}, \tag{2}$$

∂_ω - обозначение частной производной по частоте ω. Заметим, что определённая таким образом скорость, может быть как больше, так и меньше скорости света в вакууме. В общем случае выражения (1) и (2) не являются в строгом смысле скоростью распространения импульса как целого [19], так как, вообще говоря, не соответствует скорости передачи энергии и информации, но могут быть измерены на практике и имеют важные приложения [13; 20].

Стоит отметить результат недавней экспериментальной работы [21], где рассматривались квантовые состояния неколлинеарных фотонов в процессе спонтанного параметрического рассеяния света (СПРС). Авторы проводили эксперименты, где пары фотонов разделялись на два канала, в первом из которых фотоны распространялись в волокне с заданной скоростью близкой к скорости света в вакууме. Во втором канале фотоны распространялись в свободном пространстве. Было показано, что скорость распространения фотонов вдоль оси пучка накачки была меньше скорости света в вакууме. Эффект замедления был зарегистрирован по смещению положения минимума кривой Хонга-Оу-Манделя (ХОМ) [22], описывающей зависимость числа совпадений сигналов от времени задержки, для фотонов, распространяющихся в свободном канале. Было продемонстрировано, что положение минимума кривой зависит от поперечной компоненты $\vec{k}_\perp$ полного импульса фотонов, распространяющихся в свободном канале. Согласно полученным результатам работы [21] скорость распространения определяется формулой:

$$v = c\left(1 - \frac{k_\perp^2}{2|\vec{k}|^2}\right), \tag{3}$$

которая меньше чем скорость света в вакууме при $k_\perp \neq 0$. Важно подчеркнуть, что эффекты связанные с замедлением скорости распространения ЭМИ, в особенности для квантовых состояний поля, очень малы, но доступны наблюдению в экспериментах.

В настоящей диссертации проблема скорости распространения импульсов света вакууме рассматривается принципиально с другой позиции, а именно, исходя из физического смысла понятия Лоренц-инвариантной массы (ЛИМ). Применение концепции ЛИМ к световым импульсам представляет фундаментальный интерес и ранее не было подробно изучено.

Как ясно из результатов работы [21], явление квантовой интерференции играет особую роль в измерениях квантовых состояний света. СПРС является базовым инструментом для изучения квантовых состояний света, а также имеет обширные применения в областях квантовой информатики и исследований фундаментальных основ квантовой механики [23—35]. В процессе параметрического рассеяния один фотон с частотой ω_p преобразуется в пару рассеянных фотонов ω_1 и ω_2 в соответствии с законом сохранения [36—39]:

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \tag{4}$$

Волновой вектор $\vec{k}_p$ в кристалле удовлетворяет условию:

$$\vec{k}_p \approx \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \tag{5}$$

Точное равенство в (5) не достигается ввиду конечных размеров кристалла и спектральных свойств накачки. Комбинация этих условий определяет частотное и угловое распределение фотонов, родившихся в процессе СПРС, а также меру перепутывания и характеристики, связанные с квантовой интерференцией [33; 40; 41]. Квантовое описание оптических параметрических процессов можно найти например в работах [42; 43]. В главе (4) описаны новые аспекты частотно невырожденных и неколлинеарных режимов СПРС, рассмотрение которых может быть полезно для измерений на основе явления квантовой интерференции (в частности эффектов замедления света).

Ниже приводится обзор литературы, посвящённый понятию ЛИМ и её физическому смыслу в рамках специальной теории относительности. Также рассмотрены некоторые особенности квантовых состояний электромагнитного поля и базовые подходы описания классических локализованных импульсов света.

Понятие массы в специальной теории относительности подробно изложено в работах Л.Б. Окуня [44—46] и, например, книге Л.Д.Ландау [47]. Последующий обзор связанный с понятием ЛИМ базируется во многом на результатах дан-

ных работ. Под ЛИМ частицы с полной энергией $\mathcal{E}$ и импульсом $\vec{p}$ в некоторой инерциальной системе отсчёта следует понимать следующую величину:

$$m^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^4} - \frac{\vec{p}^2}{c^2}, \tag{6}$$

здесь c - скорость света в вакууме. ЛИМ является скаляром - инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца при переходе в другую инерциальную систему отсчёта:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= \gamma(\mathcal{E} - \vec{v}\vec{p}) \\ p'_x &= \gamma(p_x - \frac{|\vec{v}|\mathcal{E}}{c^2}) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z, \end{aligned} \tag{7}$$

где для простоты относительная скорость $\vec{v}$ штрихованной системы отсчёты выбрана вдоль оси x, $\gamma = \sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}$.

Инвариантность массы особенно наглядна, если использовать общепринятый в специальной теории относительности тензорный формализм. Энергия и импульс объединены в один 4 - вектор импульса $p^i = (\mathcal{E}/c^2, \vec{p})^T$. Таким образом, по определению, масса - это результат свёртки (норма) 4-вектора импульса частицы.

$$m^2 = \frac{1}{c^2} g_{ij} p^i p^j = \frac{1}{c^2} p_i p^i = \frac{1}{c^2} {p_k}' {p^k}', \tag{8}$$

где по повторяющемся индексам производится суммирование, $g_{ij} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ - метрический тензор в пространстве Минковского, $p^{i'} = (\mathcal{E}'/c^2, \vec{p}')^T = \mathcal{L}^i_j p^j$. Здесь $p^{i'}$ - 4-вектор импульса в новой (штрихованной) системе отсчёта, $\mathcal{L}^i_j$ обозначает матрицу преобразования Лоренца при переходе из лабораторной системы отсчёта в новую (штрихованную). Инвариантность массы при преобразованиях Лоренца является её важнейшим свойством. Чтобы подчеркнуть этот факт, в данной работе используется именно термин ЛИМ вместо просто массы.

В случае изолированной физической системы, состоящей из совокупности N частиц, понятие массы остаётся неизменным и задаётся формулой (6), только в данном случае в качестве $\mathcal{E}$ и $\vec{p}$ следует понимать полные энергию и импульс

соответственно:

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{E}_{[n]}, \;\; \vec{p} = \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_{[n]}, \tag{9}$$

где $\mathcal{E}_{[n]}$ и $\vec{p}_{[n]}$ - энергия и импульс n - ой частицы. Полная энергия и импульс являются аддитивными физическими величинами по отношению к частицам, входящим в систему, и в соответствии с законами сохранения неизменны для изолированной системы. ЛИМ изолированной системы также является постоянной, но не аддитивной величиной. В качестве примера рассматривается система из двух частиц с энергиями и импульсами $\mathcal{E}_{[1]}$,$\vec{p}_{[1]}$ и $\mathcal{E}_{[2]}$,$\vec{p}_{[2]}$ соответственно. Согласно (6) масса такой системы задаётся выражением

$$m^2 = \frac{(\mathcal{E}_{[1]} + \mathcal{E}_{[2]})^2}{c^4} - \frac{\left(\vec{p}_{[1]} + \vec{p}_{[2]}\right)^2}{c^2} \neq \left(m_{[1]} + m_{[2]}\right)^2, \tag{10}$$

где $m_{[1]}$ и $m_{[2]}$ - ЛИМ частиц каждой в отдельности. Ещё одно свойство ЛИМ, глубже отражающее её физический смысл, связано с системой отчёта покоя. Пусть в некоторой ИСО полный импульс частицы (совокупности частиц как целого) равен нулю $\vec{p} = 0$. Тогда согласно (10) имеет место известная взаимосвязь массы и энергии в системе отсчёта покоя: $\mathcal{E} = mc^2$. С другой стороны, при переходе в другую систему отсчёта, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ относительно исходной системы покоя, получаются выражения для энергии и импульса, следующие непосредственно из преобразований Лоренца:

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2, \;\; \vec{p} = \gamma m\vec{v}. \tag{11}$$

Из соотношений (11) вытекает важная взаимосвязь между скоростью распространения, импульсом и энергией всей совокупности частиц:

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}}. \tag{12}$$

Исходя из вышесказанного следует, что если ЛИМ совокупности частиц не равна нулю, то существует система отсчёта, в которой данная система как целое покоится. Если же ЛИМ системы равна нулю, то система как целое движется со скоростью света в вакууме и не существует такой инерциальной системы

отсчёта, где такая совокупность частиц как целое находилась бы в состоянии покоя. Это утверждение фактически отражает физический смысл ЛИМ (или просто массы) в специальной теории относительности. Связь между ЛИМ совокупности частиц и модулем скорости распространения совокупности задаётся формулой:

$$|\vec{v}| = c\sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}}. \tag{13}$$

Другое важное свойство ЛИМ состоит в том, что она не ответственна на прямую за гравитационное взаимодействие, как это имеет место в механике Ньютона. В рамках общей теории относительности гравитационное взаимодействие определяется с помощью тензора энергии-импульса физической системы и описывается уравнениями Эйнштейна (см. например [47],[48]). Только в нерелятивистском пределе (когда малы скорости объектов, а гравитационные поля слабы) можно отождествить компоненту ТЭИ системы T_{00} с её массой в том смысле, как принято понимать массу в Ньютоновой механике [48]. Резюмируя, уместно привести сравнение понятия массы в Ньютоновой механике и теории относительности. Результаты сравнения представлены в таблице (1).

В случае системы фотонов понятие ЛИМ также применимо и даёт наглядные и важные результаты. Частный случай системы из двух фотонов обсуждался в работах Л.Б. Окуня (где рассматривалась именно ЛИМ системы фотонов) и упоминался в работе [49]. Пусть имеется два фотона с одинаковой частотой ω_0, но с различными направлениями волновых векторов $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ соответственно, где $\theta \in \left[0,\pi\right]$ - угол между волновыми векторами. Полный 4-импульс данной совокупности частиц задаётся выражением:

$$p^i = \hbar \begin{pmatrix} 2\omega_0/c \\ \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \end{pmatrix} \tag{14}$$

Согласно (8), ЛИМ имеет вид

$$m = \sqrt{\frac{\hbar^2}{c^2}p^ip_i} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{c^2}\left(\frac{4\omega_0^2}{c^2} - \left(\vec{k}_1 + \vec{k}_2\right)^2\right)} = \frac{2\hbar\omega_0}{c^2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{15}$$

Схематичное изображение приведено на рисунке:

Для $\theta \neq 0$, согласно (15), существует не нулевая ЛИМ двух фотонов. Случай

Таблица 1 — Физический смысл понятия массы в рамках механики Ньютона и специальной теории относительности.

Механика Ньютона	Специальная теория относительности
1. Масса является мерой количества материи. 2. Масса аддитивна (масса суммы частиц равна сумме масс каждой частицы). 3. Масса является мерой инерции. 4. Определяет взаимодействие с гравитационным полем. 5. Масса инвариантна при переходе из одной ИСО в другую (по отношению к преобразованиям Галилея).	1. Масса не является мерой количества материи 2. Масса не аддитивна (зависит от ориентации импульсов отдельных частиц совокупности). 3. Масса не характеризует меру инерции. 4. Не определяет взаимодействие с гравитационным полем. 5. Масса инвариантна при переходе из одной ИСО в другую (по отношению к преобразованиям Лоренца).

$\theta = \pi$ соответствует максимальной ЛИМ, в не строгом смысле, допускает классическую аналогию - стоячие электромагнитные волны в резонаторе или волны в волноводе. В частности, подобные рассуждения приводились в уже упомянутой работе [49] и работах [50—52] основанных на полуклассическом описании электромагнитного поля. В данных работах приводится сопоставление между релятивистской формулой для связи массы и энергии (6) (переписанной в форме $\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$) и дисперсионным уравнением для волн в полом металлическом резонаторе с идеальными стенками, задающими граничные условия для классического поля. Фактически, в работах [49; 51; 52] полагается, что масса пропорциональна критическим частотам волновода. По мнению автора данных работ, наличие массы обусловлено статическим флуктуационным полем вакуума, локализованного между стенками волновода. Тем не менее, в данной аналогии нигде на прямую не подразумевается ни ЛИМ, ни её физический смысл. Заметим, что сопоставление фотона классической плоской волне, равно как и рассуждения касательно его пространственной локализации, требуют большой осторожности в применении. Стоит дать отдельные комментарии касательно

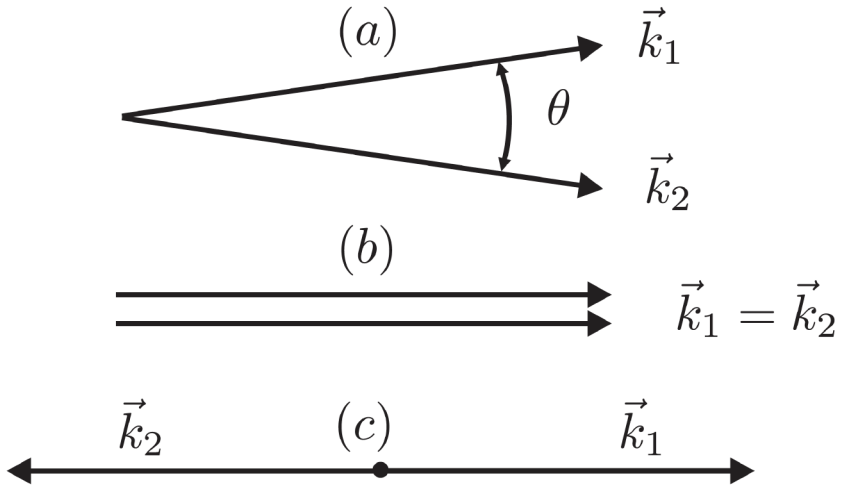

Рисунок 1 — Схематическое изображение системы двух фотонов с различным углом между волновыми векторами. (a) - угол между волновыми векторами, что соответствует ЛИМ $2\hbar\omega_0/c^2 \sin\theta/2$, (b) - коллинеарные фотоны, угол $\theta = 0$, ЛИМ: $m = 0$, (c) - антиколлениарные фотоны $\theta = \pi$, ЛИМ: $m = 2\hbar\omega_0/c^2$.

проблемы пространственной локализации и волновой функции фотонов, а также комментарий касательно массы фотона как элементарной частицы.

Проблемы волновой функции в координатном представлении для фотонов можно найти в монографиях по квантовой оптике [53—55] и квантовой электродинамике [56]. Аналогия между описанием квантов поля излучения - фотонов, в координатном пространстве и частиц с массой, например электронов (описываемых рамках нерелятивистской квантовой механики), вообще говоря не является строго правомерной. Во-первых, для фотона не существует состояния с определённым $|r\rangle$, или, другими словами, волновой функции фотона в координатном представлении, как собственной функции некоторого оператора положения в пространстве [57; 58]. Заметим, что так как фотон - релятивистская частица, то применение к нему оператора положения [59] не удовлетворяющего требованиям специальной теории относительности, строго говоря, также не является правомерным. Данная проблема тесно связана с проблемой пространственной локализации фотона, и обсуждается, в частности, в работах [60—64]. Напротив, в нерелятивистской квантовой механике вероятность $P(x)$ нахождения частицы (например электрона) в некотором интервале $(x,x + dx)$ задаётся его волновой

функцией $\psi(x)$ в координатном представлении:

$$P(x) = \psi(x)\psi(x)^* \tag{16}$$

Лишь приближённо, в рамках полуклассического описания, можно условно считать, что вероятность найти световой квант в объёме $V \to \infty$ равна:

$$P(x) \approx \frac{\vec{E}(x)^2 + \vec{H}(x)^2}{8\pi\hbar\omega} \tag{17}$$

Для случая точно определённой, локализованной области, понятие частоты кванта ω теряет физический смысл. Вторым аргументом является тот факт, что для определённой выше вероятности (16) не существует уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{S} = 0 \tag{18}$$

где

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \tag{19}$$

Важно подчеркнуть, что строгое определение положения частицы с массой имеет смысл только в нерелятивистском пределе. Известно [56], что волновая функция фотона в импульсном представлении (как функция $\vec{k}$) корректно определена и имеет чёткий физический смысл вероятности фотона иметь импульс (волновой вектор) в определённом интервале. Были предприняты попытки ввести волновую функцию фотона в координатном представлении, фактически, основываясь на обратном преобразовании Фурье [65—68]. Этот подход также обладает рядом недостатков. Во-первых, при таком подходе полученная волновая функция не удовлетворяет требованиям ковариантности, и является нелокальной, так как зависит от поля, определённого во всём пространстве и не может корректно описывать взаимодействие, например с точеными зарядами. Тем не менее, отчасти, данные контраргументы можно преодолеть. В некоторых приближениях, понятие волновой функции фотона в координатном представлении может иметь место. Так, например, в работах [69—71] предложен подход основанный на использовании вектора Римана-Зильберштейна [72—74] $\vec{F}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) + i\vec{H}(\vec{r},t)$. Во-первых, заметим, что уравнения Максвелла пере-

писываются в компактном виде с помощью этого 6-компонентного вектора:

$$i\hbar\frac{\partial\vec{F}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}=c\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)$$
$$\mathrm{div}\vec{F}\left(\vec{r},t\right)=0 \tag{20}$$

Можно установить тесную аналогию с квантовой механикой если ещё раз переписать (20) используя матрицы $\hat{\vec{s}}$ действующие на компоненты $\vec{F}$:

$$s_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ s_y=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\ s_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

Фактически, данные матрицы являются записью матриц спина - 1 в декартовых координатах. Они не являются диагональными, так как действуют не на собственный вектор, а на произвольный трёхмерный вектор. Используя соотношение:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=-i(\vec{a}\hat{\vec{s}})\vec{b} \tag{22}$$

Уравнения Максвелла приобретают вид:

$$i\hbar\frac{\partial\vec{F}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}=\frac{ch}{i}(\hat{\vec{s}}\vec{\nabla})\vec{F}\left(\vec{r},t\right) \tag{23}$$

В то время как условие равенства нулю дивергенции компонент полей для электромагнитного поля в вакууме имеет вид:

$$\left(\hat{\vec{s}}\,\vec{\nabla}\right)^2\vec{F}\left(\vec{r},t\right)=\Delta\vec{F}\left(\vec{r},t\right) \tag{24}$$

Для того, чтобы имел место принцип суперпозиции, необходимо уметь складывать волновые функции с разной поляризацией или корректнее с разной спиральностью. Это возможно если следовать аналогии с релятивистски ковариантным уравнением Дирака и представить волновую функцию в виде спинора, аналогично волновой функции электрона:

$$\Psi(\vec{r},t)=\begin{pmatrix}\vec{F}_+(\vec{r},t)\\\vec{F}_-(\vec{r},t)\end{pmatrix}, \tag{25}$$

Где $\vec{F}_{\pm} = \vec{E}(\vec{r},t) \pm i\vec{H}(\vec{r},t)$. В свободном пространстве (вакууме) функции $\vec{F}_{+}$ и $\vec{F}_{-}$ эквивалентны. Так как у фотона нет античастицы, то можно оперировать лишь с одной из компонент $\vec{F}_{\pm}$. Уравнения (23),(24) можно переписать

$$i\hbar\frac{\partial\Psi\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} = \hat{H}_0\Psi\left(\vec{r},t\right),\ \hat{H}_0 = c\rho_3(\hat{\vec{s}}\frac{h}{i}\vec{\nabla}), \tag{26}$$

где матрицы $\rho_i,\ i = 1,2,3$ - аналог матрицы Паули, действующий на $\Psi\left(\vec{r},t\right)$ следующим образом:

$$\rho_1\Psi = \begin{pmatrix}\vec{F}_{-}\\ \vec{F}_{+}\end{pmatrix},\ \rho_2\Psi = \begin{pmatrix}-i\vec{F}_{-}\\ i\vec{F}_{+}\end{pmatrix},\ \rho_3\Psi = \begin{pmatrix}\vec{F}_{+}\\ \vec{F}_{-}\end{pmatrix} \tag{27}$$

Это представление обладает рядом преимуществ. Оно обеспечивает согласованность между вычислением средних величин (энергии, импульса, числа частиц и т.д.), удовлетворяет принципу суперпозиции в квантовой механике (линейность), допускает вероятностную интерпретацию, не противоречит требованиям теории относительности, (смотрите детали в работе [70]). Тем не менее, в приведённом подходе не используется стандартная процедура квантования электромагнитного поля в привычном смысле. Теоретическая конструкция задания волновой функции с использованием вектора Римана-Зильберштейна для свободного поля в вакууме не обладает существенными преимуществами в расчётах по сравнению с общепринятыми методами. Связь между волновой функцией в координатном представлении и стандартными методами квантовой оптики предложена в работе [75]. Состояние фотона определяется как суперпозиция некоторого набора базисных состояний на основе принципа суперпозиции. Суть в том, что рассматриваются операторы рождения и уничтожения фотонов, как линейные комбинации стандартных операторов рождения $a^{\dagger}_{\vec{k},\sigma}$ и уничтожения фотонов $a_{\vec{k},\sigma}$ в моде с фиксированными $\vec{k},\sigma$.

$$\hat{b}^{\dagger}_{j,\sigma} = \int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}U^{\sigma}_{j}(\vec{k})^{*}a^{\dagger}_{\vec{k},\sigma},\ \left[\hat{b}_{j,\beta},\hat{b}^{\dagger}_{l,\gamma}\right] = \delta_{j,l}\delta_{\beta,\gamma} \tag{28}$$

где $U^{\sigma}_{j}(\vec{k})$ - унитарная матрица преобразования. Авторы работы [75] демонстрируют как данное представление позволяет интерпретировать фотон как локализованный объект.

Стандартная процедура квантования поля, позволяет находить средние энергию и импульс поля для любого состояния группы фотонов и корректно описывать их наблюдаемые в соответствии с экспериментом. В рамках общепринятых схем измерений в квантовой оптике, оперируют с оператором числа фотонов в определённом объёме V [76]:

$$\hat{n}_V = \int_V \hat{\vec{A}}^{(-)}(\vec{r},t)\hat{\vec{A}}^{(+)}(\vec{r},t)d\vec{r},$$
$$\hat{\vec{A}}^{(+)}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k},\sigma}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\sigma}a_{\vec{k},\sigma}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} \tag{29}$$

где V - например, объём области занимаемой полем около детектора (предполагается, что $(V)^{1/3} \gg \lambda_0$, λ_0 - характерная (несущая) длина волны фотонов), $a_{\vec{k},\sigma}$ - оператор уничтожения фотона в моде с волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией σ, $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\sigma}$. Заметим, что сам процесс измерения существенно зависит от внутреннего устройства и параметров детектора [77]. Существует подход, основанный на идее использовать корреляционные функции операторов электрического поля в качестве волновых функций фотона и тесно связанный с упомянутом процессом детектирования [78—80], детальный разбор также можно найти в книге [54]. Для задач в рамках настоящей диссертации формализма квантовой оптики достаточно, для того чтобы описать все аспекты связанные с ЛИМ и средней скоростью распространения света описываемого как квантовое состояние.

В дополнении стоит упомянуть, что модуль квадрата вектора Римана-Зильберштейна $|\vec{F}^2| = 8\pi c^2\mu(\vec{r},t)$, где $\mu(\vec{r},t)$ задаётся равенством:

$$\mu^2(\vec{r},t) = \left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi c^2}\right)^2 - \left(\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{4\pi c^2}\right)^2 = inv., \tag{30}$$

Данная величина является Лоренц-инвариантом и может трактоваться как плотность массы поля [81; 82]. Плотность массы интересна тем, что для обычной плоской волны $\mu(\vec{r},t) \equiv 0$, в то время как для полей с более сложной конфигурацией волнового фронта, она может служить в качестве меры отклонения фронта волны в произвольной точке $(\vec{r},t)$ от плоского [82]. Этот аспект затрагивается в Главе 1.

Возвращаясь к вопросу ЛИМ фотона как элементарной частицы - элементарного кванта возбуждения поля, то согласно современным представлениям

ЛИМ одного фотона можно положить раной нулю. Данный факт подтверждается в ряде экспериментов и астрономических наблюдений. Например в работах [83; 84] масса фотона оценивается с помощью тонкого механического эксперимента, тогда как астрономические наблюдения, касающиеся измерения массы фотона, обсуждаются в работах [85—90]. Основываясь на приведённых наблюдениях, можно дать экспериментальное ограничение значения массы фотона: $m_{\text{ph}} < 10^{-52} \div 10^{-48}$ гр. Данная масса очень мала, и в рамках расчётов ЛИМ считается, что масса единичного фотона (вообще говоря, находящегося в состоянии Фока) есть строго нуль. Как уже было отмечено выше, ЛИМ на прямую не ответственна за гравитационные свойства. Результаты, связанные с описанием гравитационных свойств световых пучков можно найти, например, в работах [91; 92].

Рассмотрим классическое описание ЭМИ. Для работы с ограниченными в пространстве пучками света принято использовать параксиальное приближение. Ниже приводятся базовые сведения касательно описания пучков и импульсов света. Подробные методики описания, особенности и эффекты связанные с ЭМИ можно найти в книге [93].
Под параксиальной монохроматической волной понимают плоскую волну (компоненту поля) - $e^{ik_z z}$ распространяющуюся вдоль оси z с медленно меняющейся амплитудой $E(\vec{r})$ где предполагается, что $k_\perp \ll k,\ k_z \approx k = \omega/c$. В рамках этого приближения комплексная амплитуда поля удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E(\vec{r})}{\partial z} \ll kE(\vec{r}) \\ &\frac{\partial^2 E(\vec{r})}{\partial z^2} \ll k^2 E(\vec{r}) \end{aligned} \tag{31}$$

Комплексная амплитуда удовлетворяет параксиальному уравнению Гельмгольца:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E(\vec{r}) - 2ik\frac{\partial E(\vec{r})}{\partial z} = 0 \tag{32}$$

Одним из простейших решения параксиального уравнения Гельмгольца является Гауссов пучок, комплексная амплитуда которого задаётся выражением:

$$E_{\text{Gauss}}(\vec{r}) = \frac{A_0 W_0}{W\,(z)} \exp\big[-\frac{(x^2+y^2)}{2W^2(z)}\big] \times$$
$$\times \exp\big[-ikz - ik\frac{(x^2+y^2)}{2R(z)} + i\zeta(z)\big], \tag{33}$$

где A_0- константа, $W(z) = W_0\sqrt{1+(z/z_0)^2}$ - зависимость ширины пучка от z, $R(z) = z\big[1+(z_0/z)^2\big]$ - интерпретируется как радиус кривизны волнового фронта, $\zeta(z) = \arctan(z/z_0)$ - запаздывание фазы по сравнению с плоской волной(фаза Гюи), $W_0 = \sqrt{\lambda z_0/\pi}$ - радиус перетяжки (при $z = 0$). Гауссов пучок является далеко не единственным возможным решением уравнения (32). Существуют решения параксиального уравнения Гельмгольца, которые имеют негауссово распределение интенсивности, например пучки Эрмита - Гаусса, образующие полный набор решений уравнения(32):

$$E_{\text{HG}}(\vec{r}) = A_{l,m}\frac{W_0}{W(z)}\mathcal{HG}_l(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)})\mathcal{HG}_m(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)})$$
$$\exp\big[-ikz - ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + i(l+m+1)\zeta(z)\big] \tag{34}$$

где обозначено: $\mathcal{HG}_l(u) = \mathcal{H}_l(u)e^{-u^2/2}$, $\mathcal{H}_l$ - полиномы Эрмита, $A_{l,m}$ - постоянная, l,$m = 0$,1,2,... Используя цилиндрические координаты (ρ,ϕ,z) можно перейти к другому полному набору решений параксиального уравнения Гельмгольца - модам (пучкам) Лагерра-Гаусса, которые как уже было отмечено обладают рядом интересных свойств. В частности данные пучки обладают орбитальным угловым моментом [94—98]:

$$E_{\text{LG}}(\vec{r}) = A_{l,m}\left(\frac{W_0}{W(z)}\right)\exp\big[-\frac{\rho^2}{2W^2(z)}\big]\left(\frac{\rho}{W(z)}\right)^l \mathcal{L}_m^l\big[\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\big]$$
$$\exp\big[-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - il\phi + i(l+2m+1)\zeta(z)\big], \tag{35}$$

где $\mathcal{L}_m^l$ - обозначение для обобщённых полиномов Лагерра. Расчёты других структур (включая векторную структуру) и ряд интересных особенностей

пучков (таких как слабая дифракция) можно изучить в работах [99—103].

Приведённые выше выражения для пучков позволяют задавать пространственную конфигурацию ЭМИ. Так как ЭМИ имеют конечную длительность, то один из наиболее удобных способов описания ЭМИ основан на методах Фурье-оптики [93]. Основная суть подхода заключается в рассмотрении суперпозиции монохроматических компонент формирующих ЭМИ (в вакууме), где зависящая от времени компонента напряженности поля $E_\sigma(\vec{r},t)$ представима в виде:

$$E_\sigma\left(\vec{r},\omega\right) = \int E_\sigma\left(\vec{r},t\right) e^{i\omega t} dt \tag{36}$$

Если поле задано в некоторой плоскости $z = const_1$, то поле в другой плоскости $z = z_2 = const_2$ определяется с помощью преобразования:

$$E_\sigma(x,y,\omega)|_{z=z_2} = \int\int h(x,x',y,y') E_\sigma(x',y',\omega)|_{z=z_1} dx'dy', \tag{37}$$

здесь $h(x,x',y,y')$ - функция отклика на импульсное воздействие. Обратное преобразование Фурье (для произвольной координаты z) совместно с уравнениями Максвелла позволяют восстановить поле во всём полупространстве $z > z_1$. Применение методов Фурье-оптики лежит в основе расчётов ЛИМ структурированных импульсов света и продемонстрировано в Главе 2 диссертации. Особенности и методы детектирования ЭМИ можно найти например в работах [104—110].

Целью данной работы является теоретическое изучение фундаментальной характеристики импульсов электромагнитного излучения - Лоренц-инвариантной массы, а также скорости распространения электромагнитных импульсов на основе физического смысла Лоренц-инвариантной массы. Были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Расчёт Лоренц-инвариантной массы и средней скорости распространения электромагнитного импульса излучения, описываемого с помощью многомодовых когерентных состояний, где в качестве модели был выбран Гауссов импульс.
2. Обобщение расчётов Лоренц-инвариантной массы и средней скорости распространения применительно к классическим импульсам с произвольной пространственно-временной конфигурацией.

3. Нахождение Лоренц-инвариантной массы бифотонов, образующихся в процессе СПРС, и установление соответствия между Лоренц-инвариантной массой и параметром степени перепутывания (параметр Шмидта) состояния фотонов.
4. Исследование квантовой интерференции фотонов, рождённых в процессе спонтанного параметрического рассеяния света с синхронизмом типа 1, для различных режимов с частотной невырожденностью, неколлинеарностью и нетривиальной угловой селекцией бифотонов в схеме эксперимента Хонга-Оу-Манделя.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Импульсы классического электромагнитного поля в вакууме, локализованные в пространстве и времени, могут рассматриваться как релятивистские объекты, интегральными характеристиками которых являются полная энергия $\mathcal{E}$, полный импульс $\vec{p}$ и Лоренц-инвариантная масса m, а также определяемая ими средняя скорость распространения $|\langle\vec{v}\rangle|$, меньшая чем скорость света в вакууме c.
2. Структурирование световых импульсов существенно влияет на их Лоренц-инвариантную массу и среднюю скорость распространения.
3. Понятие Лоренц-инвариантной массы применимо к квантовым состояниям электромагнитного поля, в частности, образующимся в процессе спонтанного параметрического рассеяния света.
4. Существуют режимы спонтанного параметрического рассеяния, в которых Лоренц-инвариантная масса m (в расчете на одну пару излучаемых фотонов) оказывается прямо пропорциональной параметру Шмидта K степени перепутывания фотонов: $m \propto K$.
5. Свойства квантовой интерференции бифотонов в процессе спонтанного параметрического рассеяния управляются параметрами частотной невырожденности и угловой неколлинеарности.

Научная новизна:

1. Впервые понятие Лоренц-инвариантной массы было последовательно и непротиворечиво применено к импульсам электромагнитного излучения.

2. Впервые рассчитана средняя скорость распространения импульсов различных пространственных и временных конфигураций, определяемая их Лоренц-инвариантной массой.
3. В случае коллинеарного частотно-вырожденного спонтанного параметрического рассеяния впервые установлена взаимосвязь между мерой углового перепутывания фотонов с их Лоренц-инвариантной массой.
4. Впервые теоретически описана модификация эффекта Хонга-Оу-Манделя, возникающая в неколлинеарном частотно-невырожденном режиме спонтанного параметрического рассеяния при четырех-щелевой угловой селекции фотонов. Показано, что в этих условиях вместо кривой сигнала совпадений с единственным провалом возникает структура типа временной гребенки с многими осцилляциями в зависимости от времени задержки в одном из каналов распространения фотонов.

Научная и практическая значимость Результаты, полученные в данной работе, представляют собой фундаментальный интерес, так как Лоренц-инвариантная масса является ещё одной фундаментальной характеристикой электромагнитных импульсов и квантовых состояний электромагнитного поля. Скорость локализованного в пространстве импульса, определяемая на основе физического смысла Лоренц-инвариантной массы, характеризует его как целое и всегда меньше скорости света. Полученные результаты могут быть полезны в области сверхточных измерений с использованием локализованных и структурированных импульсов света, а также квантовых состояний бифотонов.

Апробация работы. Результаты исследования были представлены на 5 конференциях:

1. CEWQO 2016 - 23th Central European Workshop on Quantum Optics, 27 June to 1 July 2016, Orthodox Academy of Crete, in Kolymbari, Crete, Greece.
2. LPHYS'16, 25th Annual Interantional Laser Physics Workshop, Yerevan, Armenia, July 11-15, 2016
3. MIPT (PhysTech)-QUANT - 2018, Dolgoprudny, international conference on quantum technologies, September 9-15, 2018, Dolgoprudny, Russia.
4. 59-я научная конференция МФТИ, 21 - 26 ноября 2016 г., Долгопрудный, Россия.

5. International Conference "Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis"17-21 June 2019, Moscow Institute of Physics and Technology

Личный вклад. Все результаты были получены автором лично или при его непосредственном участии. Работа над компоновкой, структурой и написанием статей велась совместно с коллегами. При создании публикаций, автор внёс существенный вклад в их написание. Структура и содержание данной работы демонстрируют личный вклад автора в исследование и в опубликованные результаты.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 авторских публикациях , опубликованных в журналах, индексируемых Web of Science

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка цитируемой литературы. Полный объём диссертации составляет 125 страниц с 36 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 128 наименований.

Глава 1. Лоренц-инвариантная масса и эффект замедления на примере Гауссова электромагнитного импульса.

В данной главе понятие Лоренц-инвариантной массы применяется к Гауссовым ЭМИ. Рассматривается эффект замедления Гауссова ЭМИ в вакууме, основанный на физическом смысле ЛИМ.
В первой части ЭМИ описывается как совокупность большого числа фотонов с помощью многомодовых когерентных состояний, высчитываются его основные динамические характеристики - средняя энергия, импульс и ЛИМ. Использование многомодовых состояний позволяет описывать поле как волновой пакет, что соответствует с идеям работы [75]. Во второй части рассматривается классическая модель ЭМИ. В третьей части приводится сопоставление квантовомеханического и классического описания ЭМИ, приводится аналитическое выражение для ЛИМ в дальней волновой зоне ЭМИ, а также обсуждается концепция инвариантной плотности массы поля. В четвёртой части подробно обсуждается эффект замедления. Показано, что средняя скорость распространения ЭМИ меньше скорости света в вакууме, что напрямую связано с наличием ЛИМ. Обсуждаются возможные эксперименты.

1.1 Многомодовые когерентные состояния

Многомодовые когерентные состояния [111] поля наиболее близко подходят для описания классических ЭМИ. Заметим, что не взаимодействующий с внешним окружением ЭМИ в вакууме представляет собой изолированную систему. Таким образом, состояние поля задаётся в виде:

$$|\Psi\rangle = \prod_{\vec{k},\sigma} e^{-\frac{|\alpha_{\vec{k},\sigma}|^2}{2}} \sum_{n_{\vec{k},\sigma}} \frac{\left(\alpha_{\vec{k},\sigma} a^{\dagger}_{\vec{k},\sigma}\right)^{n_{\vec{k},\sigma}}}{n_{\vec{k},\sigma}!} |\mathrm{vac}\rangle \,, \tag{1.1}$$

где $|\mathrm{vac}\rangle$ - вакуумное состояние, $|\alpha_{\vec{k},\sigma}|^2$ - среднее число фотонов в моде, характеризуемое волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией σ, $a^{\dagger}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma}$ - операторы рождения и уничтожения фотона в соответствующей моде. С точки зрения квантовой

механики, ЭМИ состоит из совокупности фотонов, которые заполняют различные моды ($\vec{k}$,σ). Так как состояние (1.1) удовлетворяет условию нормировки $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, можно рассчитать среднее от любых операторов, представимых как функции от операторов рождения или уничтожения.

$$\langle N\rangle = \langle\Psi|\sum_{\vec{k},\sigma} a^{\dagger}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma}\,|\Psi\rangle = \sum_{\vec{k},\sigma} |\alpha_{\vec{k},\sigma}|^2 \tag{1.2}$$

Полное число частиц в данном случае представляет собой инвариант по отношению к преобразованию Лоренца. Следуя выводу, предложенному в [112], данное утверждение можно доказать с помощью следующего рассуждения. Для простоты рассмотри одну моду поля, характеризуемую определённым 4 - волновым вектором $k^i,\ k^i k_i = 0$. В релятивистском случае 4-вектор потенциала обязан удовлетворять калибровочному условию в форме Лоренца.

$$\partial\mathcal{A}^i/\partial x^i = 0 \tag{1.3}$$

В общем случае 4-вектор потенциал поля $\mathcal{A}_i$ имеет не нулевую $\mathcal{A}_0$ компоненту. Даже если в некоторой ИСО эта компонента и была равна нулю, то при переходе в другую ИСО посредством преобразований Лоренца компонента $\mathcal{A}_0$ задаётся как функция $\mathcal{A}_i$

Рассмотрение квантование электромагнитного поля в рамках специальной теории относительности и выполнением требований калибровочной инвариантности может быть описано в рамках формализма Гупта - Блейлера [113; 114] (ковариантное описание). Приведённый здесь вывод значительно упрощен для наглядности. В данном случае удобно задать операторы рождения и уничтожения следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i(\vec{k}) &= \sum_{j=0}^{3} \epsilon_i^{(j)}(\vec{k}) a^{(j)}(\vec{k}) \\ a_i^{\dagger}(\vec{k}) &= \sum_{j=0}^{3} \epsilon_i^{(j)}(\vec{k}) a^{(j)\dagger}(\vec{k}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $a^{(j)\dagger}(\vec{k})$ - оператор рождения фотона в моде $\vec{k}$ и введён поляризационный базис в 4-ёх мерном пространстве $\epsilon_i^{(j)},\ j = 0,1,2,3$. Для дальнейших рассуждений

наиболее важен факт того, что в следствии требования калибровочной инвариантности вклад в полную энергию дают только поперечные фотоны. Предполагается, что для каждого физически реализуемого состояния электромагнитного поля $|\Psi\rangle$ имеет место условие [112—114]:

$$k^i a_i(\vec{k})\,|\Psi\rangle = 0, \tag{1.5}$$

где $a_i(\vec{k})$ - оператор уничтожения фотона в моде с $\vec{k}$. Операторы рождения и уничтожения (1.4) при однородном преобразовании Лоренца ($\mathcal{L}$) преобразуются:

$$\begin{aligned} a_{i'}(k^{p'}) &= U(\mathcal{L})a_i U(\mathcal{L})^\dagger = \mathcal{L}_i^j a_j(\mathcal{L}_r^{p'} k^r) \\ a_{i'}^\dagger(k^{p'}) &= U(\mathcal{L}){a_i}^\dagger U(\mathcal{L})^\dagger = \mathcal{L}_i^j a_j^\dagger(\mathcal{L}_r^{p'} k^r), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $U(\mathcal{L})$ - унитарный оператор, задающий представление однородной группы Лоренца, вектор $\vec{k}$ - формально заменяется на 4-вектор k^p, так как при преобразованиях Лоренца изменяется как его направление так и его модуль, но всегда имеет место $k^p k_p = \omega_{\vec{k}}^2 - c^2\vec{k}^2 = 0$, что также следует из Уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Релятивистскую инвариантность удобно доказывать в представлении Гейзенберга, в котором состояние не зависит от времени. Подразумевается, что $U(\mathcal{L})\,|\text{vac}\rangle = |\text{vac}\rangle$ - вакуумное состояние Лоренц-инвариантно. Следующая цепочка равенств демонстрирует преобразование Лоренца для состояния фотона в определённой моде с фиксированными $\vec{k}$ и некоторой поляризацией ϵ_i. Используя (1.6), получаем соотношение:

$$|1_{k',\epsilon'}\rangle = a_{i'}(k^{i'})^\dagger\,|\text{vac}\rangle = U(\mathcal{L})a_i^\dagger U(\mathcal{L})^\dagger\,|\text{vac}\rangle = U(\mathcal{L})\,|1_{k,\epsilon}\rangle\,. \tag{1.7}$$

Рассуждение, приведённое выше, очевидным образом обещается на многомодовый случай. Оператор числа частиц в новой системе отсчёта можно записать в стандартной форме $\hat{N}' = \sum_{i'} a_{i'}(k^{p'})^\dagger a_{i'}(k^{p'}) = U(\mathcal{L})\hat{N}U(\mathcal{L})^\dagger$. Формально индекс трёхмерной поляризации σ заменяется на i - индекс 4-ёх мерной поляризации. Такая замена уместна, так как продольные фотоны не дают вклада в энергию или наблюдаемое число частиц, как уже упоминалось выше. Как следует из (1.7) состояние (1.1) преобразуется как $|\Psi'\rangle = U(\mathcal{L})\,|\Psi\rangle$ при преобразованиях Лоренца. Следующая цепочка равенств, доказывает, что среднее число фото-

нов, описываемых чистым состоянием свободного поля в вакууме, инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца:

$$\langle N' \rangle = \langle \Psi' | \hat{N}' \Psi' \rangle = \langle \Psi | U(\mathcal{L})^{\dagger} U(\mathcal{L}) \hat{N} U(\mathcal{L})^{\dagger} U(\mathcal{L}) \Psi \rangle = \langle N \rangle \,, \tag{1.8}$$

где было использовано условие $U(\mathcal{L})U(\mathcal{L})^{\dagger} = 1$ унитарности оператора $U(\mathcal{L})$
С помощью многомодовых когерентных состояний, можно рассчитать среднюю энергию и импульс согласно выражениям:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{\vec{k}\,\sigma} \hbar\omega_k \, \langle \Psi | a^{\dagger}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\,\sigma} | \Psi \rangle = \sum_{\vec{k},\,\sigma} \hbar\omega_k |\alpha_{\vec{k},\,\sigma}|^2, \tag{1.9}$$

$$\langle \vec{p} \rangle = \sum_{\vec{k}\,\sigma} \hbar\vec{k} \, \langle \Psi | a^{\dagger}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\,\sigma} | \Psi \rangle = \sum_{\vec{k},\,\sigma} \hbar\vec{k} \, |\alpha_{\vec{k},\,\sigma}|^2, \tag{1.10}$$

где $\omega_k = c|\vec{k}\,|$. Таким образом, после подстановки полученных выражений для средней энергии и импульса в универсальную формулу для массы (6), ЛИМ имеет вид:

$$m^2c^4 = \langle \varepsilon \rangle^2 - c^2 \, \langle \vec{p} \rangle^2 = \hbar^2 c^2 \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \left(k^i k'_i \right) \sum_{\sigma,\sigma'} |\alpha_{\vec{k},\,\sigma}|^2 |\alpha_{\vec{k}',\,\sigma'}|^2, \tag{1.11}$$

где $k_i = \left(\frac{\omega_{\vec{k}}}{c}, \vec{k} \right)$. Так как величины $\left(k^i k'_i \right)$, $|\alpha_{\vec{k},\,\sigma}|^2$ и $|\alpha_{\vec{k}',\,\sigma'}|^2$ - Лоренц-инвариантны, то таковой является и ЛИМ выраженная через них. В следствии того, что $\left(k^i k_i \right) = 0$ все диагональные слагаемые в (1.11) уничтожаются, в то время как недиагональные слагаемые $\left(k^i k'_i \right)$ определяют ненулевую Лоренц-инвариантную массу, соответствующую состоянию $|\Psi\rangle$.
Напряжённость электрического поля определяется как среднее от соответствующего оператора $\langle \Psi | \hat{E}_{\sigma} | \Psi \rangle$

$$\hat{E}_{\sigma} = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \left[a_{\vec{k},\,\sigma} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} - a^{\dagger}_{\vec{k},\,\sigma} e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \right], \tag{1.12}$$

в итоге получаем:

$$\langle E \rangle_{\sigma} (\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \, |\alpha_{\vec{k},\,\sigma}| \left[e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t + \varphi_{\vec{k},\,\sigma})} - e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t + \varphi_{\vec{k},\,\sigma})} \right], \tag{1.13}$$

здесь $\varphi_{\vec{k},\sigma}$ - фаза комплексного числа $\alpha_{\vec{k},\sigma}$.
Переход от дискретного суммирования по $\vec{k}$ в выражениях (1.9), (1.10) и (1.13) к интегрированию по непрерывным переменным производится с помощью известного соотношения:

$$\sum_k \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}, \tag{1.14}$$

где V - нормировочный объём.

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle &= \sum_{\vec{k},\sigma} |\alpha_{\vec{k},\sigma}|^2 = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\,|\alpha_{\vec{k},\sigma}|^2.\\
\langle \varepsilon\rangle &= \sum_{\sigma} \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\,\hbar\omega_k\,|\alpha_{\vec{k},\sigma}|^2\\
\langle \vec{p}\rangle &= \sum_{\sigma} \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\,\hbar\vec{k}\,|\alpha_{\vec{k},\sigma}|^2,\\
\langle E\rangle_\sigma(\vec{r},t) &= \frac{1}{2^{3/2}\pi^{5/2}}\int d\vec{k}\,\sqrt{V\hbar\omega_k}\;|\alpha_{\vec{k},\sigma}|\sin(\omega_k t-\vec{k}\vec{r}-\varphi_{\vec{k},\sigma}).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы сравнить Фурье разложение среднего значения поля ЭМИ, полученного в рамках квантовой оптики, с классическим Фурье разложением этого поля.

1.2 Классическая модель электромагнитного импульса.

В данном разделе рассматривается классическая модель ЭМИ, которая получена на основе Гауссова пучка. Как было отмечено во введении, Гауссов пучок является одним из простейших решений параксиального уравнения Гельмгольца. Чтобы задать ЭМИ, рассмотрим граничную задачу. Пусть в плоскости $z=0$ пространственная часть напряжённости поля задана в виде Гауссова пучка как функция от (x,y). Предполагается, что ЭМИ имеет конечную длительность (локализован во времени), временная огибающая также имеет вид Гаусс-функции. Напряженность электрического поля ЭМИ задана в следующей форме:

$$E_\sigma(\vec{r}_\perp,t)|_{z=0} = E_\sigma^{(0)}(\vec{r}_\perp)\sin(\omega_0 t)\,e^{-t^2/2\tau^2}, \tag{1.16}$$

где τ - длительность ЭМИ, ω_0 - несущая частота. Цель - по данным граничным условиям определить поле во всём полупространстве $z > 0$. Для простоты на данном этапе пространственная часть амплитуды поля $E_\sigma(\vec{r}_\perp,t)|_{z=0}$ задаётся в общем виде как функция поперечных координат $\vec{r}_\perp$. В дальнейшем она будет заменена на Гаусс-функцию, которая совпадает с выражением для Гауссова пучка в плоскости $z = 0$. Компонента поля $E_\sigma(\vec{r}_\perp,t)|_{z=0}$ - представляет собой действительную функцию. Рассмотрим, разложение Фурье (1.16) относительно временной t и пространственной $\vec{r}_\perp$ переменных

$$E_\sigma(\vec{r}_\perp,t)|_{z=0} = \frac{i\tau}{2(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k}_\perp d\omega\, e^{i\vec{k}_\perp\cdot\vec{r}_\perp - i\omega t} \widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp) \times \left[e^{-(\omega+\omega_0)^2\tau^2/2} - e^{-(\omega-\omega_0)^2\tau^2/2}\right], \tag{1.17}$$

где $\widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp)$ - Фурье образ в $z = 0$ пространственной части $E_{\sigma 0}^{(0)}(\vec{r}_\perp)$, зависящей от поперечных координат

$$\widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{r}_\perp e^{-i\vec{k}_\perp\cdot\vec{r}_\perp} E_\sigma^{(0)}(\vec{r}_\perp). \tag{1.18}$$

Электрическое поле - действительная функция, поэтому Фурье образ $\widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp)$ должен удовлетворять условию $\widetilde{E}_\sigma^{(0)}(-\vec{k}_\perp) = \left[\widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp)\right]^*$, где символ $(*)$ обозначает комплексное сопряжение. Меняя знак переменной интегрирования ω в интеграле (1.17) содержащее первое слагаемое в квадратных скобках- $e^{-(\omega+\omega_0)^2\tau^2/2}$, можно свести интегрирование по ω к более удобной форме

$$\int d\omega\, e^{-(\omega-\omega_0)^2\tau^2/2} \left[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right]. \tag{1.19}$$

Совершая простую подстановку $\omega t \to \omega t - k_z z$, где $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}_\perp^{\,2}}$, получаем распределение поля во всём полупространстве $z > 0$:

$$E_\sigma(\vec{r}_\perp,t,z) = i\frac{\tau}{2(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k}_\perp \int d\omega\, e^{i\vec{k}_\perp\cdot\vec{r}_\perp} \widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp) \times e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{2}} \left[e^{-i(\omega t - k_z z)} - e^{+i(\omega t - k_z z)}\right]. \tag{1.20}$$

Наконец, интегрирование по ω можно заменить на интегрирование по k_z, используя правило замены переменных в интеграле $\int d\omega = \int dk_z \frac{c^2 k_z}{\omega_k}$, где $\omega_k =$

$ck = c\sqrt{k_z^2 + \vec{k}_\perp^2}$. Выполнив данные преобразования, выражение для напряженности электрического поля принимает форму:

$$E_\sigma(\vec{r},t) = \frac{\tau}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k} \left| \widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp) \right| \frac{c^2 k_z}{\omega_k} e^{-(\omega_k-\omega_0)^2\tau^2/2} \times \sin\left[\omega_k t - \vec{k}\vec{r} - \varphi_\sigma(\vec{k}_\perp)\right], \tag{1.21}$$

где $\varphi_\sigma(\vec{k}_\perp)$ - обозначение для фазы Фурье образа $\widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp)$ полученного, в формуле (1.18). Заметим, что выражение (1.21) представляет частный случай общего правила [47] для нахождения поля $E(\vec{r},t)$ произвольной конфигурации в виде собственных функций, удовлетворяющих уравнениям Максвелла.

$$E(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k} \left[\widetilde{E}_{\vec{k}}\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \widetilde{E}^*_{\vec{k}}\, e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \right], \tag{1.22}$$

где

$$\widetilde{E}_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_k t} + \widetilde{E}^*_{-\vec{k}}\, e^{i\omega_k t} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{r}\, E(\vec{r},t) e^{-i\vec{k}\vec{r}}. \tag{1.23}$$

1.3 Сравнение классического и квантовомеханического описания Гауссовго электромагнитного импульса. Расчёт Лоренц-инвариантной массы.

Сравнивая выражение для напряжённости электрического поля, полученное в рамках квантовомеханического описания (1.15), с полученным в рамках классического подхода (1.21) убеждаемся, что параметр $\alpha_{\vec{k},\sigma}$ когерентного состояния напрямую связан с Фурье образом напряжённости электрического поля ЭМИ. Заметим, что данное сравнение позволяет установить подобную взаимосвязь для ЭМИ с произвольной пространственной конфигурацией.

$$|\alpha_{\vec{k},\sigma}| = \frac{\pi\tau}{\sqrt{V\hbar\omega_k}} |\widetilde{E}_\sigma^{(0)}(\vec{k}_\perp)| \frac{c^2|k_z|}{\omega_k} e^{-(\omega_k-\omega_0)^2\tau^2/2}, \tag{1.24}$$

здесь учтено, что $\varphi_{\vec{k},\sigma} = \varphi_\sigma(\vec{k}_\perp)$. Подставляя $|\alpha_{\vec{k},\sigma}|$ из выражения (1.24) в полученные КЭД формулы (1.15), мы получаем классические выражения для сред-

ней энергии:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{(c\tau)^2}{8\pi}\int d\vec{k}\ |\widetilde{E}^{(0)}(\vec{k}_\perp)|^2\Big(\frac{ck_z}{\omega_k}\Big)^2 e^{-(\omega_k-\omega_0)^2\tau^2} \tag{1.25}$$

и импульса:

$$\langle\vec{p}\rangle = \frac{(c\tau)^2}{8\pi}\int d\vec{k}\,|\widetilde{E}^{(0)}(\vec{k}_\perp)|^2\frac{\vec{k}}{\omega_k}\Big(\frac{ck_z}{\omega_k}\Big)^2 e^{-(\omega_k-\omega_0)^2\tau^2}. \tag{1.26}$$

Заметим, что зависимость напряжённости электрического поля от индекса поляризации σ определяется проекциями векторов e_σ на σ - ось по которой направлен единичный вектор поляризации поля $\vec{e}_{\vec{k}}$ (так как $\vec{e}_{\vec{k}} \perp \vec{k}$). Когда квадрат абсолютного значения Фурье амплитуды поля суммируется по σ, он становится равным единице:

$$\sum_\sigma |e_\sigma|^2 \equiv |\vec{e}_{\vec{k}}|^2 = 1 \tag{1.27}$$

Данная ремарка объясняет факт того, что суммирование по любой зависимости от σ исчезает в (1.25), (1.26) и в формулах ниже.
Перепишем ЛИМ в следующем виде:

$$m^2c^4 = \Big(\langle\varepsilon\rangle + |c\,\langle\vec{p}\rangle\,|\Big)\Big(\langle\varepsilon\rangle - |c\,\langle\vec{p}\rangle\,|\Big). \tag{1.28}$$

На данном этапе полагаем, что распределение поля в плоскости $z = 0$ имеет Гауссов вид:

$$\begin{aligned} E^{(0)}(\vec{r}_\perp) &= E_0 e^{-\vec{r}_\perp^2/2w^2}, \\ \widetilde{E}^{(0)}(\vec{k}_\perp) &= E_0 w^2 e^{-\vec{k}_\perp^2 w^2/2}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

здесь w - перетяжка ЭМИ в $z = 0$. Ввиду аксиальной симметрии:

$$\begin{aligned} &\langle p_x\rangle = \langle p_y\rangle = \\ &= \frac{(c\tau)^2}{8\pi}\int d\vec{k}\,|\widetilde{E}^{(0)}(\vec{k}_\perp)|^2\frac{k_x}{\omega_k}\Big(\frac{ck_z}{\omega_k}\Big)^2 e^{-(\omega_k-\omega_0)^2\tau^2} = \\ &= \frac{(c\tau)^2}{8\pi}\int d\vec{k}\,|\widetilde{E}^{(0)}(\vec{k}_\perp)|^2\frac{k_y}{\omega_k}\Big(\frac{ck_z}{\omega_k}\Big)^2 e^{-(\omega_k-\omega_0)^2\tau^2} = 0 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Остаётся единственная компонента импульса не равная нулю $\langle p_z \rangle \neq 0$. Согласно параксиальному приближению, предполагается, что поперечные размеры и пространственная длина ЭМИ значительно больше длины волны (на несущей частоте) :

$$w, c\tau \gg \lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0}. \tag{1.31}$$

В соответствии с этими условиями, экспоненциальный фактор в (1.25) и (1.26) принимает вид:

$$e^{-(\omega_k-\omega_0)^2\tau^2} \approx e^{-(k_z-\omega_0/c)^2(c\tau)^2}, \tag{1.32}$$

слагаемое $(ck_z/\omega_k)^2$ можно приблизительно положить равным единице, что даёт:

$$\langle \varepsilon \rangle \approx c \langle p_z \rangle = \frac{E_0^2(c\tau)^2}{8\pi} \int d\vec{k}\, e^{-\vec{k}_\perp^2 w^2} e^{-(k_z-\omega_0/c)^2(c\tau)^2} = \frac{\sqrt{\pi} c\tau w^2 E_0^2}{8} \tag{1.33}$$

В свою очередь

$$\langle \varepsilon \rangle + c \langle p_z \rangle \approx \frac{\sqrt{\pi} c\tau w^2 E_0^2}{4}. \tag{1.34}$$

Разница $\langle \varepsilon \rangle$ и $c \langle p_z \rangle$ в выражении для ЛИМ (1.28) весьма мала. Ненулевое выражение возникает если рассматривать:

$$1 - \frac{ck_z}{\omega_k} \approx \frac{\vec{k}_\perp^2}{2(\omega_0/c)^2} \tag{1.35}$$

Это даёт следующую оценку для разности $\langle \varepsilon \rangle$ - $c \langle p_z \rangle$:

$$\langle \varepsilon \rangle - c \langle p_z \rangle = \frac{E_0^2(c\tau)^2}{16\pi(\omega_0/c)^2} \int d\vec{k}\, \vec{k}_\perp^2 e^{-\vec{k}_\perp^2 w^2} e^{-(k_z-\omega_0/c)^2(c\tau)^2} = \frac{\sqrt{\pi} c\tau E_0^2}{16(\omega_0/c)^2}. \tag{1.36}$$

Подставляя полученные выражения (1.34) и (1.36) в определение ЛИМ (1.28), получаем окончательный результат:

$$m = \frac{\sqrt{\pi}\tau w E_0^2}{8\omega_0} = \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \frac{E_0^2 \tau w \lambda}{c}. \tag{1.37}$$

Формулу (1.37) полезно сравнить с формулой для средней энергии $\langle \varepsilon \rangle$ (1.33):

$$m = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{2\pi c^2} \frac{\lambda}{w} \ll \frac{\langle \varepsilon \rangle}{c^2}. \tag{1.38}$$

Приведём численные оценки, например, в случае следующих параметров ЭМИ: средняя энергия 10 мДж (интенсивность 10^{10} Вт/см^2, длительность - 1 пс), размер перетяжки $w = 1$ см и длина волны $\lambda = 1$ μм. В этом случае масса получается равной $m = 10^{-20}$ г. Для тех же параметров, оценка среднего числа фотонов в ЭМИ имеет вид:

$$N = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\hbar\omega_0} \approx 10^{17}. \tag{1.39}$$

В терминах среднего числа фотонов N, выражение для ЛИМ (1.37) принимает следующую форму:

$$m = \frac{N\hbar\omega_0}{2\pi c^2}\frac{\lambda}{w}. \tag{1.40}$$

Данный результат аналогичен случаю, когда рассматриваются два пучка фотонов, где в каждом из пучков по N коллинеарных фотонов, а угол между направлениями распространения фотонов ϑ.

$$m_{N+N} = \frac{2N\hbar\omega}{c^2}\sin\vartheta. \tag{1.41}$$

Аналогия переходит в соответствие если принять, что угол ϑ равен углу дифракционной расходимости в ЭМИ (пучке) с определённым коэффициентом $\vartheta = \lambda/4\pi w \ll 1$. Это означает, что модель совокупности (пучков) фотонов представленная выше достаточно хорошо описывает на качественном уровне особенности распространения классических пучков света. Ещё один заслуживающий внимания аспект связан с вариацией параметров ЭМИ и, как следствие, ЛИМ. Например переход к бесконечно "широкому"пучку $w \to \infty$. Может показаться, что в пределе пучок должен перейти в плоскую волну, в которой все фотоны коллинеарны и инвариантная масса стремится к нулю. В реальности, ЛИМ зависит от того, какие величины меняются, а какие остаются неизменными при стремлении $w \to \infty$. Если поперечный размер пучка w растёт, но при этом амплитуда напряжённости поля E_0 и длительность ЭМИ постоянны τ, то в таком случае, в соответствии с формулой (1.37), ЛИМ m стремится к бесконечности:

$$m|_{E_0=\text{const.}} \propto w \to \infty, \text{ при } w \to \infty. \tag{1.42}$$

Напротив,если w растёт при фиксированном среднем числе фотонов N в объёме ЭМИ (или, что тоже самое энергия $\langle \varepsilon \rangle$ зафиксирована), тогда из выражений

(1.38) и (1.40) следует, что ЛИМ стремится к нулю:

$$m|_{N=\text{const.}} \propto 1/w \to 0,\ w \to \infty. \tag{1.43}$$

Тем не менее, существует большое количество промежуточных случаев, когда E_0 и N варьируются совместно с изменением поперечного размера пучка (ЭМИ), в таком случае ЛИМ $m|_{w\to\infty}$ может принять любое значение от 0 до ∞ в зависимости от того, как функции $E_0(w)$ и $N(w)$ связаны с поперечным размером пучка w.

ЛИМ является характеристикой ЭМИ как целого. Как упоминалось во введении, наряду с ЛИМ существует другая инвариантная величина, которую можно трактовать как плотность массы поля μ, определяемая в выражении (30). В общем случае $\mu = \mu\left(\vec{r},t\right)$ - инвариантная характеристика поля определяемая в каждой точке пространства и времени. В случае обыкновенной плоской волны $\mu\left(\vec{r},t\right) \equiv 0$, что аналогично случаю фотонов с коллинеарными волновыми векторами. Плотность массы $\mu = 0$ также для плоских волн с коллинеарными волновыми векторами, но произвольными частотами и поляризациями. Если рассматриваются две плоские монохроматические волны с одинаковыми поляризациями $\vec{E}_1 \| \vec{E}_1 \| Ox$, но с различными направлениями волновых векторов, заданные в виде $\vec{E} = \vec{E}^0_{1,2} \cos\left(\omega_{1,2} - \vec{k}_{1,2}\vec{r}\right)$, $\vec{k}_{1,2} \in (y,z)$, угол между волновыми векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ равен $\theta \in \left[0,\pi\right]$, то

$$\begin{aligned}\mu_{\text{two waves}} &= \frac{|E_1 E_2|}{4\pi c^2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \\ &= \frac{|E^0_1 E^0_2|}{4\pi c^2} |\cos\left(\omega_1 - \vec{k}_1\vec{r}\right) \cos\left(\omega_2 - \vec{k}_2\vec{r}\right)| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{1.44}$$

Этот простейший случай при $\omega_1 = \omega_2$, аналогичен случаю двух фотонов с различными волновыми векторами, но одинаковыми частотами. Плотность массы классического электромагнитного поля является его локальной характеристикой в четырёхмерном пространстве. Так как для обычной плоской волны $\mu\left(\vec{r},t\right) \equiv 0$ для любых $(\vec{r},t)$, то для произвольного поля можно трактовать минимум $\mu\left(\vec{r},t\right) \geq 0$ как меру отклонения волнового фронта поля от плоской волны в точке $(\vec{r},t)$.

Несмотря на кажущиеся сходство с Лоренц-инвариантной массой, не существует прямого соответствия между концепцией плотности массы и ЛИМ, так как

в общем случае интеграл $\int_{V_{\text{pulse}}} \mu\left(\vec{r},t\right) d\vec{r} \neq m$ не Лоренц-инвариантен и не совпадает с ЛИМ.

1.4 Средняя скорость распространения, эффект замедления и «система отсчёта покоя» электромагнитного импульса.

В главе 1 была введена средняя скорость совокупности частиц (12). Согласно физическому смыслу ЛИМ, если она равна нулю, то средняя скорость распространения такой совокупности совпадает со скоростью света с вакууме. Таким образом, не существует системы отсчёта, в которой бы данная совокупность частиц как целое находится в состоянии покоя. Используя найденные выше выражения для средней энергии, импульса (1.33) и симметрию распределения Гаусса (в следствии которой $\langle p_x \rangle = \langle p_y \rangle = 0$) (1.30) и ЛИМ (1.37, 1.38), рассчитывается средняя скорость распространения Гауссова ЭМИ в вакууме согласно общей формуле (12):

$$v = c\left(1 - \frac{\langle\varepsilon\rangle^2 - c^2\langle p_z\rangle^2}{\langle\varepsilon\rangle\left(\langle\varepsilon\rangle + c\langle p_z\rangle\right)}\right) \approx c\left(1 - \frac{m^2c^4}{2\langle\varepsilon\rangle^2}\right) \tag{1.45}$$

Эффект замедления, заключается в том, что полученная средняя скорость распространения меньше скорости света в вакууме. Разность скорости света и средней скорости распространения равна

$$c - v \approx c\frac{m^2c^4}{2\langle\varepsilon\rangle^2} = \frac{c}{8\pi^2}\frac{\lambda^2}{w^2}. \tag{1.46}$$

Полученное выражение для скорости распространения, на основе ЛИМ полностью согласуется с выводами экспериментальной работы [21]. Более того, выражения (1.45) и (1.46) показывают, что отличие скорости распространения Гауссова ЭМИ определяется квадратом его ЛИМ. Это означает, что ЛИМ может быть косвенно измерена в эксперименте путём измерения средней скорости распространения ЭМИ. Далее, так как средняя скорость распространения v (1.45) меньше скорости света в вакууме, то ИСО, движущаяся с этой скоростью является системой отсчёта покоя ЭМИ. В данной ИСО полный импульс ЭМИ равен

нулю и поступательное движение ЭМИ полностью отсутствует.

$$\langle p_z \rangle_0 = \left. \frac{\langle p_z \rangle - v \langle \varepsilon \rangle / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right|_{v = c^2 \langle p_z \rangle / \langle \varepsilon \rangle} = 0, \tag{1.47}$$

где индекс "0"обозначает ИСО покоя ЭМИ. В этой системе отсчёта "центр масс"ЭМИ не движется, а единственное оставшееся движение связано с расплыванием ЭМИ. Расплывание ЭМИ может трактоваться как внутренне движение в системы состоящей из фотонов, формирующего ЭМИ. Схематично, распределение отдельных волновых векторов фотонов, формирующих ЭМИ изображено на рисунке 1.1. Если в лабораторной ИСО ориентация волновых векторов опре-

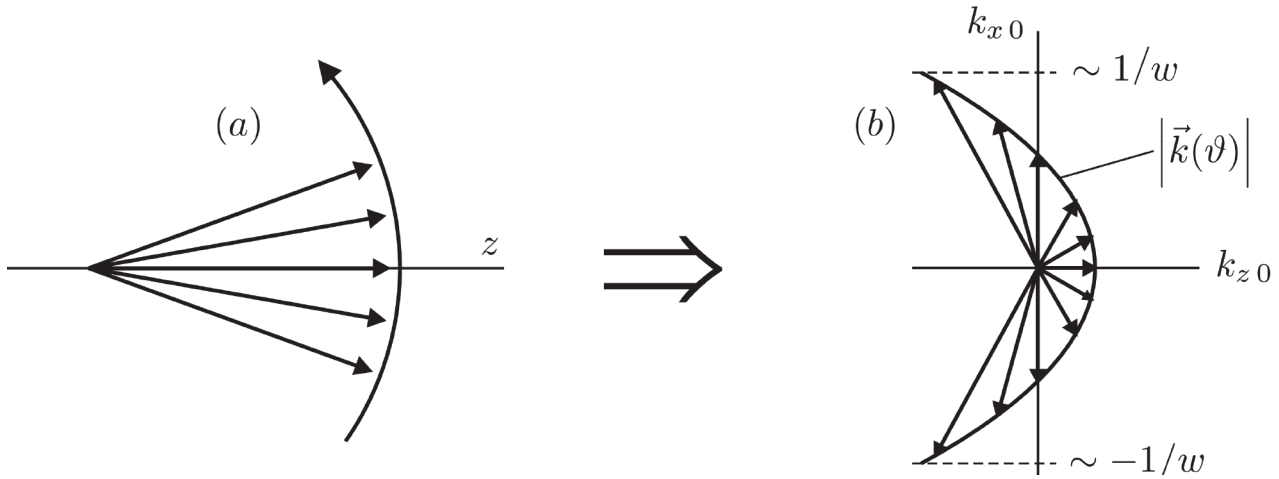

Рисунок 1.1 — Распределение волновых векторов (направлений распространения фотонов), суперпозиция которых формирует импульс в лабораторной системе отсчёта (a) и в системе отсчёта покоя (b).

деляется с помощью угла ϑ по отношению к оси z, то в ИСО покоя компоненты волновых векторов задаются с помощью преобразования Лоренца:

$$k_{z\,0}(\vartheta) = \gamma(\omega/c)(\cos\vartheta - v/c), \quad k_{\perp\,0}(\vartheta) = (\omega/c)\sin\vartheta, \tag{1.48}$$

где как и ранее релятивистский фактор $\gamma = \left[1 - v^2/c^2\right]^{-1/2}$ определяется через среднюю скорость распространения. Сплошная линия в правой части (1.1) составлена из концов волновых векторов исходящих из центра системы координат и определяется через угол ϑ. Как следует из формулы (1.48), в случае, если $\vartheta = 0$, то z - компонента волнового вектора $k_{z\,0}$ всегда положительна, что фактически означает, что не существует ИСО движущейся вдоль оси z где

направление волнового вектора $k_{z'0}(\vartheta = 0)$ может быть повёрнуто назад (инвертировано, имеет отрицательную проекцию (компоненту) на ось z). Отрицательные проекции $k_{z'}(\theta)$ возможны только в случае достаточно больших значений ϑ. В ИСО покоя сумма положительных и отрицательных z - компонент волновых векторов компенсируют друг друга, так, чтобы имело место равенство $\sum k_{z\,0} = 0$.

В ИСО покоя энергия ЭМИ $\langle\varepsilon\rangle_0$ равна его ЛИМ умноженной на квадрат скорости света в вакууме.

$$\langle\varepsilon\rangle_0 = mc^2. \tag{1.49}$$

В этом выражении заключается важный физический смысл ЛИМ как величины определяющей внутреннюю энергию рассматриваемой физической системы и не связанный с поступательным движением системы как целого. ЛИМ и энергия в системе покоя - эквивалентны и взаимозаменяемы. С другой стороны, на практике очень сложно осуществить переход в систему покоя ЭМИ, в то время как измерение средней скорости распространения ЭМИ осуществимо. Результаты подобных измерений позволяют найти соответствующую энергию ЭМИ в ИСО покоя, что, непосредственно следует из выражений (1.45) и (1.49). В лабораторной ИСО инвариантная масса в λ/w меньше энергии импульса делённого на c^2 (1.38) или, другими словами, энергия импульса в ИСО покоя ЭМИ значительно меньше энергии импульса в лабораторной ИСО

$$\langle\varepsilon\rangle_0 = \frac{\lambda}{2\pi w}\langle\varepsilon\rangle_{lab} \ll \langle\varepsilon\rangle_{lab}. \tag{1.50}$$

Энергия ЭМИ минимальна в ИСО покоя по сравнению с его энергией в других ИСО. Таким образом, основная энергия ЭМИ заключена в его поступательном движении, в то время как энергия движения связанная с расплыванием составляет лишь малую часть.

Прямое наблюдение эффекта замедления в случае Гауссовых ЭМИ затруднено, так как величины ЛИМ (1.37), (1.38), (1.40) малы. Как следствие, мала разница между скоростью распространения ЭМИ и скоростью света в вакууме $c - v$ (1.46). Тем не менее, эффект может быть значительно усилен с помощью фокусировки и дефокусировки ЭМИ. На рисунке 1.2 приводится схема возможного эксперимента. Предполагается, что ЭМИ имеет достаточно большую перетяжку $w \sim 1\,$см, что соответствует очень слабой дифракционной расходимости или

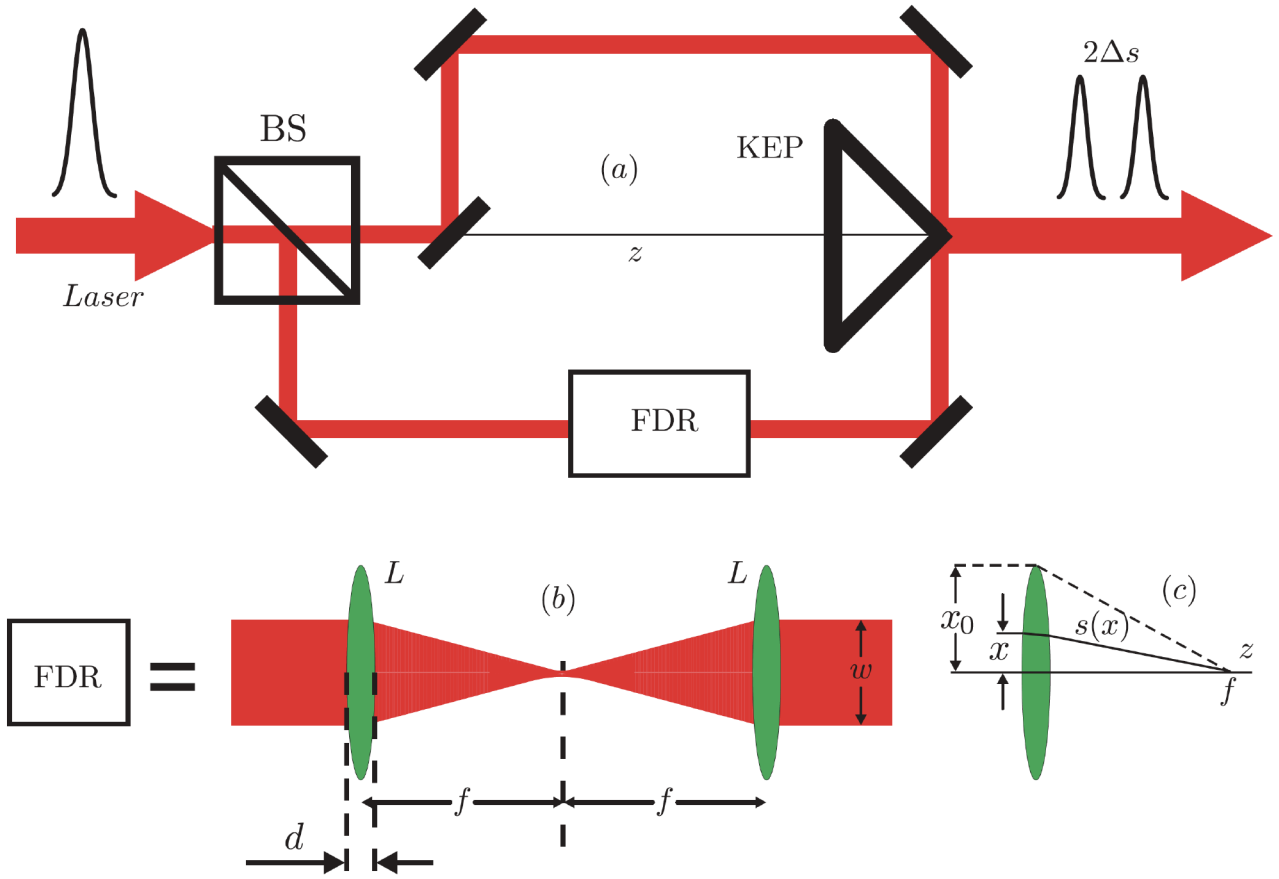

Рисунок 1.2 — Предлагаемая схема эксперимента. (a) BS и KEP - обозначают делитель пучка и призму в форме острия ножа, δs - расстояние между замедляемым и не замедляемым импульсом, FDR - область фокусировки и дефокусировки, z - центральная ось распространения. (b) Импульс внутри фокусирующей-дефокусирующей области: L - две конфокальные линзы с фокусом f, w - перетяжка импульса вне фокусирующей-дефокусирующей области. (c) Путь $s(x)$ луча, падающего на линзу на расстоянии x от горизонтальной оси одинаков для всех x, $s(x) = \text{const}$.

очень большой длине дифракции (длине Релея) $L_D \sim 2\pi w^2/\lambda \sim 10^4$ см при $\lambda = 1$ μм. Попадая на делитель пучка (BS), ЭМИ разделяется на две идентичные части, распространяющиеся с верхнем и нижнем каналах. ЭМИ в верхнем канале распространяется не будучи подверженным изменениям, в то время как ЭМИ в нижнем канале ЭМИ проходит через регион последовательной фокусировки и дефокусировки с помощью системы двух конфокальных линз. Очевидно, что система линз увеличивает оптический путь ЭМИ, по сравнению с ЭМИ распространяющимся в свободном пространстве. Если считать линзы тонкими, то удлинение оптического пути лучей формирующих ЭМИ можно легко рассчитать. Пусть $s(x)$ - оптический путь луча падающего на первую линзу на

рис. (1.2) на расстоянии x от горизонтальной оси, тогда можно считать, что $s(x)$ не зависит от x, $s(x) \equiv s$ [115]. Эквивалентность путей для всех лучей, проходящих через линзу, можно объяснить двумя причинами. Первая связана с прохождением через тело линзы, с показателем преломления $n > 1$, что приводит к замедлению скорости распространения для каждого отдельного луча согласно $c \to c/n$. Вторая причина заключается в том, что для каждого луча меняется направление распространения в результате преломления на выходе из линзы. Суммарный вклад этих очевидных особенностей распространения приводит к тому, что оптический путь не зависит от x. Таким образом, увеличение пути, пройденного лучами до фокуса, можно сравнить со случаем свободного распространения f:

$$\Delta s = s(x) - f = (n-1)d(x) + \frac{x^2}{2f} \equiv (n-1)d(0) \equiv, \frac{x_0^2}{2f} \tag{1.51}$$

здесь $d(x)$ - функция толщины линзы от высоты x относительно оси распространения, $d(0) \equiv d$ - толщина на оси, x_0 - радиус линзы (полная высота), f - фокусное расстояние. В случае параболической поверхности линзы, все эти параметры связаны между собой с помощью уравнения:

$$d(x) = d\left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right), \;\; f = \frac{x_0^2}{2d(n-1)} \tag{1.52}$$

Последняя формула следует напрямую из выражений (27.9) и (27.11) книги Фейнмана [115]. Подставляя (1.52) в выражение (1.51) становится ясно, что увеличение оптического пути $\Delta s(x)$ одинаково для всех x, $\Delta s(x) = \text{const.} \equiv \Delta\text{s}$. Другими словами, оптические пути всех лучей формирующих ЭМИ до фокуса падающий на линзу при различных x одинаковы. Как было отмечено выше, член $(n-1)d(x)$ в первой части (1.51) связан с распространением лучей в теле линзы, а возникновение члена $x^2/2f$ можно интерпретировать в результате реструктуризации (перестройка направления лучей) ЭМИ (пучка). Оба этих слагаемых одинаково важны. Слагаемое, связанное с распространением внутри тела линзы, даёт преимущественный вклад для лучей проходящих близко к оси распространения, в то время как слагаемое возникающее в результате реструктуризации преобладает для его частей на периферии. Объединённые вместе, оба этих механизма приводят к одинаковому удлинению оптических путей для всех

частей ЭМИ: центральных и на периферии. В итоге это обеспечивает неискажённое распространение ЭМИ через фокус, без изменения формы (структуры) ЭМИ. Если перетяжка ЭМИ w близка к радиусу линзы $w \approx x_0$, результирующее выражение во второй части формулы (1.51) принимает вид $\Delta s \approx w^2/2f$. На расстоянии, соответствующем удвоенному фокусному расстоянию линз на рис. (1.2), эффективный оптический путь удваивается. Расстояние $2\Delta s$ это то расстояние, которое будет на выходе установки, как показано на рис. (1.2), между ЭМИ идущим по верхнему каналу и импульсу прошедшему с задержкой в нижнем канале. Задержка в нижнем канале непосредственно связана с эффектом замедления, который возникает в результате эффекта замедления вызванного реструктуризацией ЭМИ. Так как реструктуризация ЭМИ - одна из двух внутренних причин описанной задержки, наблюдение двух хорошо различимых импульсов в предложенной схеме может быть рассмотрено как прямая демонстрация того, что реструктуризация может привести к эффекту замедления светового импульса. Из выражения (1.51) для удлинения оптического пути сразу следует выражение для средней скорости распространения ЭМИ в области фокусировки-дефокусировки.

$$v = c\left(1 - \frac{w^2}{2f^2}\right). \tag{1.53}$$

Данный результат совпадает с выражением (1.46) если сделать замену $\lambda/2\pi w \to w/f$, что указывает на глубокую аналогию между явлениями дифракции и фокусировки-дефокусировки. Эффект замедления проявляется более чётко чем в случае простой дифракции, что имеет место, если выполнены условия $w^2 \gg f\lambda/2\pi$ или $f \ll L_D$. Другими словами, если фокусное расстояние намного меньше чем дифракционная длина. Это условие имеет место для параметров $w \sim 1\,\text{см}$ и $\lambda \sim 1\,\mu\text{м}$. Так как средняя скорость распространения и инвариантная масса связаны друг с другом (1.46), описанный выше эффект замедления в области фокусировки-дефокусировки непосредственно связан с увеличением ЛИМ, которая становится равной

$$m_{\text{fdr}} = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{w}{f}. \tag{1.54}$$

В заключении к первой главе следует отметить, что эффект замедления можно

рассмотреть с другой позиции, изучая структуру распределения поля в дальней зоне, без привлечения понятия ЛИМ, концепции фотонов и аппарата СТО. Такой подход базируется только на геометрии и кинематических соотношениях для структуры ЭМИ в дальней зоне. Данный подход детально разобран во второй главе, наряду с чисто классическим описанием ЭМИ, для которого также применимо понятие ЛИМ.

Глава 2. Эффект замедления классических в вакууме. Геометрический подход. Лоренц-инвариантная масса и эффект замедления электромагнитных импульсов в вакууме с нетривиальной пространственной конфигурацией (структурированный свет).

В первой части данной главы эффект замедления рассмотрен исходя из геометрической конфигурации поля ЭМИ в дальней зоне на примере структуры Гауссова ЭМИ. Приводится сравнение средней скорости распространения Гауссова импульса, полученной с помощью Лоренц-инвариантной массы, со скоростью распространения Гауссова импульса, полученной согласно кинематическому описанию. Предложены экспериментальные способы наблюдения эффекта замедления. Во второй части приводится вывод общей формулы ЛИМ для классических ЭМИ. В третьей части рассматриваются так называемые структурированные ЭМИ в вакууме, пространственная конфигурация которых задаётся с помощью пучков Лагерра-Гаусса, Эрмита-Гаусса, Бессель-Гаусса и Эйри-Гаусса. Для фиксированной энергии ЭМИ и заданной пространственно-временной конфигурации приводятся численные результаты расчётов Лоренц-инвариантной массы и средней скорости распространения.

2.1 Дифракция как причина эффекта замедления электромагнитных импульсов в вакууме. Геометрический подход.

В главе 1 был рассмотрен эффект замедления ЭМИ основанный на физическом смысле ЛИМ. Тем не менее, существует другой способ определения средней скорости распространения. Качественно данное определение можно дать в рамках геометрической оптики. ЭМИ, имеющий конечные пространственные размеры, представим в виде совокупности лучей, распространяющихся каждый в отдельности со скоростью света, но, вообще говоря, в различных направлениях. Различие в направлениях распространения обусловлено дифракцией ЭМИ с конечными поперечными размерами. Таким образом, средняя скорость рас-

пространения ЭМИ как целого $\langle \vec{v} \rangle$ определяется как взвешенная суперпозиция скоростей отдельных лучей, где вес каждого луча фактически определяется амплитудой поля. В общем случае определённая таким образом скорость распространения $|\langle \vec{v} \rangle|$ ожидаемо будет незначительно отличаться от скорости света в вакууме. Во многих случаях величина $c - |\langle \vec{v} \rangle|$ мала. Тем не менее, как будет детально разобрано ниже, в случае очень коротких и узких ЭМИ в их дальней зоне, разница между $|\langle \vec{v} \rangle|$ и c оказывается значительной и может быть измерена в эксперименте. Явное выражение для средней скорости распространения найдено для Гауссова ЭМИ, заданного аналогично примеру разобранному в главе (1). ЭМИ задаётся в плоскости $z = 0$, после чего находится поле во всём полупространстве $z > 0$ в соответствии с уравнениями Максвелла. Далее в тексте показано, что эффект замедления значительно выражен в первую очередь благодаря уширению импульса в тыльной части вследствие дифракции.
По аналогии с выражением с (1.16) рассмотрим граничную задачу:

$$E(\vec{r};t)|_{z-=0} = E_0 \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{2w^2} - \frac{t^2}{2\tau^2}\right)\cos(\omega_0 t)\,, \tag{2.1}$$

здесь w, τ, и ω_0 - перетяжка в $z = 0$, длительность и несущая частота ЭМИ. Выбор фазы сделан из соображения удобства дальнейших вычислений. Важно отметить, что в данном разделе не уточняется поляризация и магнитная компонента поля, так как это не является существенным в рамках рассуждений данного раздела. Рассмотрим преобразование Фурье Гауссовой экспоненты в выражении для поля на границе (2.1):

$$\begin{aligned} E(\vec{r};t)|_{z=0} = E_0 \frac{w^2\tau}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{Re} \int d\vec{k}_\perp d\omega\, e^{i\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp} e^{-i\omega t} \\ \times \exp\left(-\frac{k_\perp^2 w^2}{2} - \frac{(\omega-\omega_0)\tau^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Умножая подынтегральное выражение на $e^{ik_z z}$, где $k_z = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}_\perp^{\,2}\right)^{1/2}$, находим поле в полупространстве $z \geq 0$. Так же как и в главе (1) здесь используется

параксиальное приближение, в рамках которого справедливы условия:

$$|\vec{k}_\perp| \ll \omega/c$$
$$k_z \approx \frac{\omega}{c} - \frac{c\vec{k}_\perp^2}{2\omega}. \tag{2.3}$$

С учётом (2.3), перепишем выражение (2.2) для поля в следующей форме:

$$E(\vec{r};t) = E_0 \frac{w^2\tau}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{Re} \int d\vec{k}_\perp d\omega \, \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right]$$
$$\times \exp\left[i\vec{k}_\perp\vec{r}_\perp - \frac{k_\perp^2}{2}\left(w^2 + i\frac{cz}{\omega}\right) - \frac{(\omega-\omega_0)\tau^2}{2}\right]. \tag{2.4}$$

Интеграл по $d\vec{k}_\perp$ легко берётся. В итоге получаем:

$$E(\vec{r},t) = \frac{E_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{Re}\left\{ \int d\omega \, \frac{L_D(\omega)}{iz + L_D(\omega)} \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right]\right.$$
$$\left. \times \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{2} - \frac{\vec{r}_\perp^{\,2}}{2c}\frac{\omega}{iz + L_D(\omega)}\right]\right\}, \tag{2.5}$$

где введено обозначение $L_D(\omega) = w^2\omega/c \equiv L_D \times [1 + (\omega - \omega_0)/\omega_0]$ – дифракционная длина как функция частоты ω, w – поперечный размер в плоскости $z = 0$; $L_D \equiv L_D(\omega_0)$.

Также предполагается, что ЭМИ имеет небольшую отстройку от несущей частоты и состоит из большого числа периодов, таким образом справедливы условия:

$$c\tau \gg \lambda, \text{ или } |\omega - \omega_0| \sim 1/\tau \ll \omega_0, \tag{2.6}$$

Функцию $\omega/(L_D(\omega) + iz)$, входящую во вторую линию выражения (2.5), можно разложить по степеням параметра $(\omega - \omega_0)/\omega_0$, где подразумевается согласно (2.6), что $(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$. Разложение до первого порядка:

$$\frac{\omega}{iz + L_D(\omega)} \approx \frac{\omega_0}{L_D + iz} + \frac{iz}{(iz + L_D)^2}(\omega - \omega_0).$$

Подставим данное разложение в выражение для поля (2.5), где $L_D(\omega)$ можно положить равным L_D в предэкспоненциальном факторе. В итоге вновь получается Гауссов интеграл по переменной ω. Данный интеграл также легко берётся,

что упрощает (2.5), и в результате легко получить:

$$E(\vec{r},t) = E_0 \,\mathrm{Re}\left\{ \frac{L_D}{iz + L_D} \exp\left[i\omega_0 \left(\frac{z}{c} - t \right) \right] \right.$$
$$\times \exp\left[-\frac{\omega_0 \vec{r}_\perp^{\,2}}{2c\,(iz + L_D)} \right]$$
$$\left. \times \exp\left[-\frac{1}{2(c\tau)^2} \left(z - ct - \frac{z\vec{r}_\perp^{\,2}/2}{(iz + L_D)^2} \right)^2 \right] \right\}. \tag{2.7}$$

В общем случае выражение для напряжённости поля записывается в виде:

$$E(\vec{r},t) = A(\vec{r},t) \cos\left[\omega_0 \left(z/c - t \right) + \Phi(\vec{r},t) \right], \tag{2.8}$$

где $A(\vec{r},t)$ и $\Phi(\vec{r},t)$ – действительные амплитуда и фаза соответственно. Фаза $\Phi(\vec{r},t)$ определяет внутреннюю структуру осцилляций ЭМИ, которая несущественна в рамках данного рассмотрения. В пределе дальней волновой зоны, т.е. при условии $z \gg L_D$, амплитуда поля принимает простую форму:

$$A(\vec{r},t) = E_0 \frac{L_D}{z} \exp\left[-\frac{\omega_0 \vec{r}_\perp^{\,2} L_D}{2cz^2} \right]$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2(c\tau)^2} \left(z - ct + \frac{\vec{r}_\perp^{\,2}}{2z} \right)^2 \right]. \tag{2.9}$$

Формула для амплитуды (2.9) состоит из двух экспонент. Первая экспонента характеризует дифракцию ЭМИ в дальней зоне. Дифракционный угол задан как $\alpha = r_\perp/z \leq \sqrt{c/\omega_0 L_D} = c/\omega_0 w = \lambda_0/2\pi w$, λ_0 – длина волны на несущей частоте. Вторая экспонента в (2.9) определяет структуру импульса в дальней зоне. На рисунке 2.1 представлено сечение распределения поля в плоскости (xz). Так как структура поля имеет аксиальную симметрию, то сечение не зависит от выбора направления оси Ox. Данный рисунок как и всё последующее рассмотрение относится к случаю, когда протяжённость ЭМИ $c\tau$ значительно меньше дифракционной длины L_D и, как следствие, значительно меньше расстояния между начальной плоскостью $z = 0$ и областью наблюдения, сосредоточенной около $z \approx ct$. В этом случае для любого заданного значения $r_\perp$ пик огибаю-

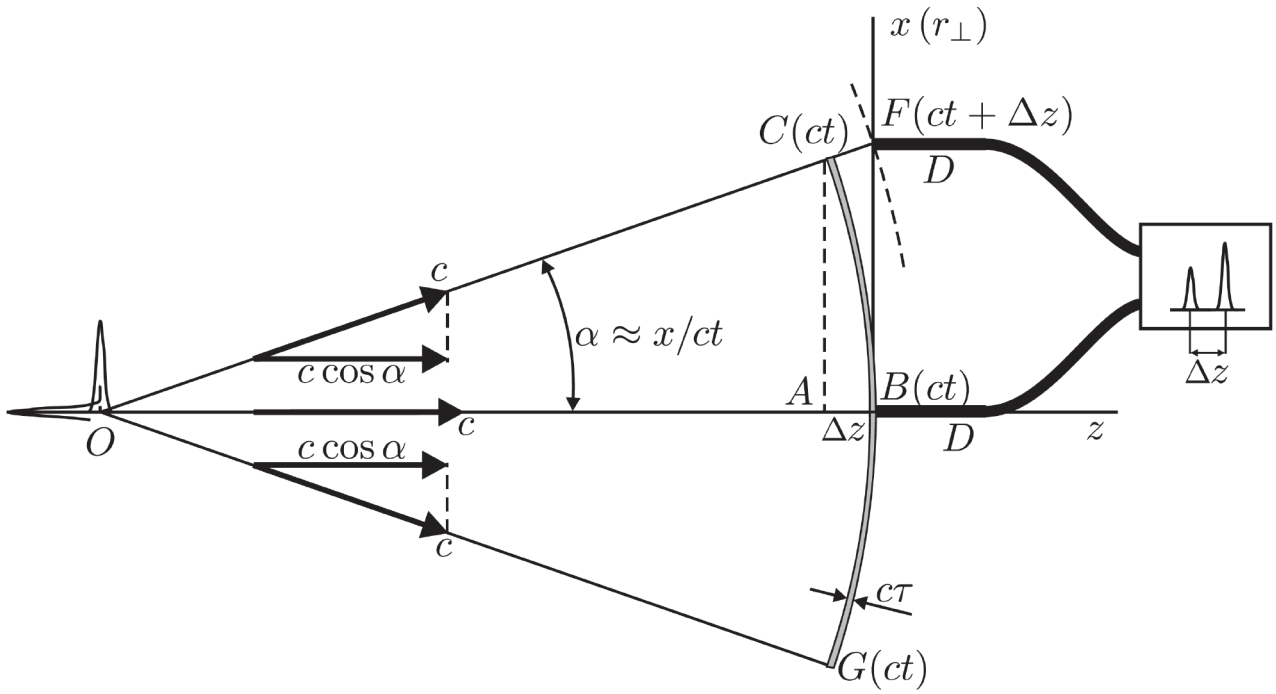

Рисунок 2.1 — Распределение поля в дальней зоне в плоскости (xz). Также представлена предлагаемая схема измерений, указывающая на эффект замедления вдоль оси z периферийных лучей составляющих импульс. Измерение осуществляется с помощью наблюдения за отдельными участками волнового фронта. Черные стрелки изображают скорость распространения света в лучах и их проекции на ось z. Символ D обозначает входы в оптоволокно, направляющие излучение к детекторам излучения и анализатору. Δz – расстояние соответствующее разнице во времени прихода излучения от различных частей фронта ЭМИ.

щей ЭМИ (максимум $A(\vec{r},t)$) согласно (2.9) достигается в координатах z и t, связанных уравнением:

$$z - ct + \frac{r_\perp^2}{2z} = 0, \tag{2.10}$$

Выражая z - координату пика как решение квадратного уравнения, получаемого из (2.10), имеем:

$$z_{\text{peak}} = \frac{ct}{2} + \sqrt{\frac{(ct)^2}{4} - \frac{r_\perp^2}{2}} \approx ct - \frac{r_\perp^2}{2(ct)}, \tag{2.11}$$

Здесь предполагается, что $r_\perp \ll z \approx ct$, что согласуется с параксиальным приближением и рассуждениями выше.

Ещё раз обратимся к рисунку 2.1. Линии OC, OB и OG описывают три луча, выбранных в качестве примера. Излучение, соответствующее каждому лучу, распространяется со скоростью света на равные расстояния $OC = OB = OG = ct \gg L_D$. Расстояние OA – проекция траектории верхнего луча OC на ось z. Из рисунка 2.1 видно, что $OA < OB$. Другими словами проекция на ось z меньше, чем путь ct, соответствующий лучу, распространяющемуся вдоль оси z. В случае малого угла α между направлением лучей и осью z (угол дифракционной расходимости), разницу между проекциями луча на ось z и ct легко оценить:

$$\Delta z = OB - OA = ct - ct\cos\alpha \approx \frac{r_\perp^2}{2ct} \ll ct. \tag{2.12}$$

Очевидно, что за одно и то же время t лучи, не параллельные оси z, проходят меньшее расстояние вдоль этой оси по сравнению с лучом, параллельным этой же оси, а компоненты скорости распространения этих лучей вдоль оси z меньше чем соответствующие компоненты для луча, идущего вдоль оси, как это показано чёрными стрелками на рисунке 2.1. Проекция скорости на ось задаётся выражением:

$$v_z(r_\perp) = c\cos\alpha = c - \frac{\Delta z}{t} = c\left(1 - \frac{r_\perp^2}{2z^2}\right). \tag{2.13}$$

Чтобы определить среднюю скорость распространения ЭМИ как целого $\langle\vec{v}\,\rangle$, необходимо посчитать взвешенную векторную сумму скоростей каждого луча составляющего ЭМИ, где весовой функцией является квадрат той части амплитуды (2.9), которая ответственна за дифракцию. Ввиду аксиальной симметрии поперечные компоненты средней скорости равны нулю $\langle v_x\rangle = \langle v_y\rangle = 0$, в то время как z-компонента задаётся формулой:

$$\langle v_z\rangle = c\left\{1 - \frac{1}{2z^2}\frac{\int d\vec{r}_\perp r_\perp^2 \exp\left[-\dfrac{\omega_0 \vec{r}_\perp^{\,2} L_D}{cz^2}\right]}{\int d\vec{r}_\perp \exp\left[-\dfrac{\omega_0 \vec{r}_\perp^{\,2} L_D}{cz^2}\right]}\right\}, \tag{2.14}$$

где интегралы легко вычисляются аналитически. В результате получаем окончательное выражение для средней скорости распространения расходящегося

ЭМИ в дальней зоне:

$$\langle v_z \rangle \equiv |\, \langle \vec{v} \,\rangle \,| = c\left(1 - \frac{c}{2\omega_0 L_D}\right) = c\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{8\pi^2 w^2}\right). \tag{2.15}$$

Заметим, что полученный результат полностью совпадает с результатом, полученным в рамках концепции ЛИМ (12). Результат этого сравнения очень важен, так как показывает согласованность теорий. С одной стороны динамического описания в СТО, с другой - результатов, напрямую следующих из волновой и геометрической оптики, описывающих ЭМИ конечных размеров. Средняя скорость распространения (2.15) связана с укорачиванием пути вдоль оси z, просуммированного по всем лучам ЭМИ

$$\langle \Delta z \rangle = (c - \langle v_z \rangle)t = z\left(1 - \frac{\langle v_z \rangle}{c}\right) = z\frac{\lambda_0^2}{8\pi^2 w^2}. \tag{2.16}$$

Формально величине $z - \langle \Delta z \rangle$ можно придать смысл центра инерции ЭМИ, хотя напрямую она не связана с гравитационными свойствами импульса.
Как указано на рисунке (2.1), одна из возможных схем наблюдения эффекта может быть реализована с помощью детекторов, принимающих излучение от различных частей ЭМИ через оптоволокно, входы в которое находятся на различных расстояниях от оси z. Используя параметры (2.19), входы в волокно могут быть установлены на расстоянии $z = 1$ м от источника ЭМИ. Например в горизонтальной плоскости в координатах $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ см, как изображено рисунке (2.19). В случае выбора волокон одинаковой длины, излучение от них может быть направлено на призму в виде острия ножа (KEP), которая объединяет пришедшие два сигнала в один, а он уже может быть проанализирован на FROG анализаторе. Ожидаемый результат качественно проиллюстрирован на рисунке (2.1). Результирующее пространственное запаздывание Δz между импульсами в соответствии с (2.12) имеет численное значение ~ 0.128 мм для выбранных значений параметров (2.19). Заметим, что хорошо наблюдаемое разделение на два импульса в предложенной схеме имеет место, если выполнено условие:

$$\langle \Delta z \rangle \gg c\tau \tag{2.17}$$

Объединяя условие (2.17) вместе с (2.6), получаем условие эффективного наблюдения эффекта замедления:

$$\langle \Delta z \rangle = z\frac{\lambda_0^2}{8\pi^2 w^2} = \lambda_0 \frac{z}{2L_d} > c\tau \gg \lambda_0, \tag{2.18}$$

где предполагается в частности, что $z \gg L_D$. Таким образом, параметры, удовлетворяющие всем приведённым выше условиям и реалистичные в рамках возможных экспериментов, могут быть выбраны, например:

$$\tau = 30\,\text{фс},\ \lambda_0 = 1\,\text{мкм},\ w = 10\lambda_0 = 10\,\text{мкм},\ z = 1\text{м}. \tag{2.19}$$

Эти параметры соответствуют протяжённости ЭМИ $c\tau = 9$мкм, дифракционной длине (длине Релея) $L_D = 628\,$мкм, дифракционному углу $\alpha \sim \lambda_0/2\pi w = 0.016 = 9^\circ$, поперечному размеру ЭМИ в плоскости измерений $x_D \sim \alpha z = 1.6$ см, увеличению расстояния для периферийных лучей $\Delta z \sim x_D^2/2z = 128\,$мкм $= 14\,c\tau$ и параметру $z/2L_D = 796 \gg 1$. В дополнение к приведённым выше средним параметрам ЭМИ, амплитуда $A(r_\perp, z, t)$, представленная в форме выражения (2.9), может быть использована для нахождения формы ЭМИ с помощью интегрирования квадрата амплитуды A^2 (2.9) по поперечным координатам при заданных значениях z и t. Результат интегрирования определяется следующим выражением:

$$F(\xi) = \int d\vec{r}_\perp A^2(r_\perp,z,t) = \frac{E_0^2 L_D^2 \pi^{3/2}}{2z^2} \times \exp\left(\frac{a^2}{4} + a\xi\right)\text{erfc}\left(\frac{a}{2} + \xi\right), \tag{2.20}$$

где $\xi = \dfrac{z/c - t}{\tau}$, “erfc” – дополнительная функция ошибок, $a = \left(\dfrac{2\pi w}{\lambda_0}\right)^2 \dfrac{2c\tau}{z}$. Для заданных выше (2.19) значений параметров ЭМИ $a = 0.07$, график функции $F(\xi)$, определяющей форму ЭМИ, приведён на рисунке (2.2). Форма сплошной линии на рисунке (2.2) указывает на ярко выраженное удлинение ЭМИ и эффект замедления, вызванный дифракцией. Также из рисунка (2.2) видно, что помимо эффекта замедления имеет место сдвиг (задержка) пика импульса по сравнению с позицией в начальный момент (без дифракции) в точке $\xi = 0$. Различные части кривой на рисунке (2.2) соответствуют различным лучам, форми-

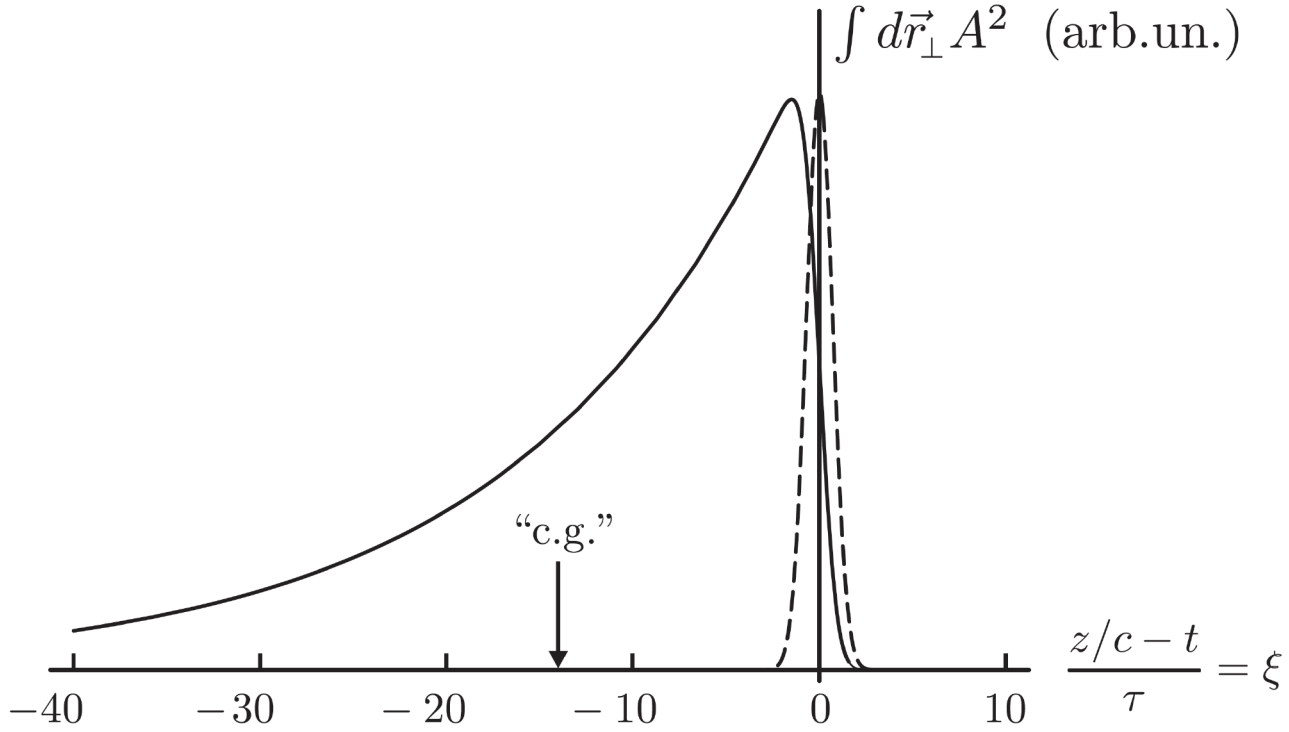

Рисунок 2.2 — Форма ЭМИ в дальней зоне (сплошная линия). Штрихованная линия соответствует начальному состоянию ЭМИ, с соответствующей нормировкой. «c.g.» – «центр инерции» импульса, выраженный в единицах протяжённости ЭМИ $c\tau$. Параметры ЭМИ для расчётов указаны в (2.19) и в тексте выше.

рующим ЭМИ. Та часть, что близка к $\xi = 0$ соответствует центральному лучу, а длинное «крыло» при $\xi < 0$ соответствует периферийным лучам ЭМИ. Удлинение заднего крыла можно наблюдать экспериментально с помощью схемы, разобранной ранее и проиллюстрированной на рисунке (2.1), но с серией дополнительных волокон, ведущих к детекторам, установленным вдоль оси z (сверху и снизу). Длина волокон должна быть выравнена для $z = \text{const}$, а излучение должно приходить на устройство, позволяющее измерять времена прибытия сигналов. В усложнённом варианте можно получить более подробный анализ формы ЭМИ, если расположить волокна, собирающие излучение ЭМИ, в виде колец с центрами на оси z и одинаковым расстоянием между детекторами, где для каждого кольца сигналы на анализаторе суммируются вместе.

Итак, в данной части анализ эффекта замедления произведен на основе геометрической и волновой оптики и не опирается на ЛИМ. Для дальнейшего анализа и полноты теоретического описания необходимо рассмотреть вывод ЛИМ, исхо-

дя из полностью классического описания полей ЭМИ, что будет представлено в следующей части настоящей главы.

2.2 Лоренц-инвариантная масса классических электромагнитных импульсов.

Классические энергия и импульс электромагнитного поля задаются хорошо известными соотношениями и выражаются через напряжённости электрического и магнитного полей:

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{H}^2(\vec{r},t)}{8\pi} dV,\ \vec{p} = \int_V \frac{\left[\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)\right]}{4\pi c} dV \tag{2.21}$$

Плотность энергии w и плотность импульса $\vec{p}$ не образуют 4 - вектора, так как преобразуются как компоненты ТЭИ, заданного выражением (2.22).

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} - F^{il} F^{k}_{l}\right), \tag{2.22}$$

где тензор электромагнитного поля задаётся в виде:

$$F^{ik} = \frac{\partial \mathcal{A}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathcal{A}^i}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

здесь $\mathcal{A}^i = \left(\mathcal{A}_0(\vec{r},t), \vec{A}(\vec{r},t)\right)^{\mathrm{T}}$ обозначает 4-вектор потенциал, где $\mathcal{A}_0(\vec{r},t)$ - в общем случае не равно нулю.

В нижеследующей ремарке будет показано, что энергия и импульс ЭМИ, занимающего конечный объём в пространстве и имеющего конечную длительность, заданные согласно (2.21), образуют 4-вектор. Данные рассуждения,

можно найти в ([116], стр. 369).

Рассмотрим момент времени $t_0 = \mathrm{const}/c$. Пусть ЭМИ локализован в конечном объёме V. Для произвольной системы 4-импульс задаётся выражением:

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k, \tag{2.24}$$

где dS_k – элемент гиперповерхности Σ, ограничивающий 4-объём Ω, заключённый между гиперплоскостями $t_0 = \mathrm{const/c}$ и $t_1 = \mathrm{const/c}$. В каждой из этих плоскостей поле существует в локализованной области, которая является объёмом занимаемым полем в соответствующий момент времени. 4-объём Ω можно считать замкнутым и ограниченным (для фиксированных t_1 и t_2), так как всегда можно выбрать область, в которой сосредоточено поле. Элемент гиперповерхности $ct = \mathrm{const}$ можно представить как $dS_i = n_i dV(t)$, где $n_i = (1{,}0{,}0{,}0)$ – единичный 4-вектор, нормаль к элементу гиперповерхности, $dV(t)$ – элемент объёма. Так как гиперповерхность Σ замкнута, её можно разбить на несколько частей: на две гиперповерхности $t_0 = \mathrm{const/c}$ и $t_1 = \mathrm{const/c}$, нормали к которым антипараллельны и боковую цилиндрическую гиперповерхность Σ_{side} с образующими, параллельными оси ct. На данной гиперповерхности поле отсутствует и, следовательно, в любой её точке $T_{ik} = 0$. Рисунок (2.3) иллюстрирует вышесказанное. Здесь важно сделать замечание касательно строгой локализации ЭМИ. Формально, модель Гауссова ЭМИ с граничными условиями (1.16) и (2.1) рассмотренными раннее, не является строго локализованной, так как выбранная временная огибающая не является финитной функцией времени. Тем не менее, в силу быстрого спадания Гаусс-функции это не является существенной проблемой. Строго локализованные ЭМИ будут рассмотрены в следующем разделе.

Воспользуемся теоремой Остроградского - Гаусса:

$$\int_\Sigma T^{ik} dS_k = \int_\Omega \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} d\Omega \tag{2.25}$$

Выражения слева и справа представляют собой 4-вектора. Осталось доказать, что выражение слева есть сохраняющийся 4-вектор импульса. В отсутствии

внешних зарядов и токов, для ТЭИ имеют место законы сохранения:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{2.26}$$

Следовательно полный поток через 4-объём равен нулю. Используя факты отсутствия потока через боковую гиперповерхность и антипараллельность нормалей к гиперплоскостям мы получаем, что 4-вектор импульса ЭМИ сохраняется во времени:

$$\int_{V(t_0)} T^{ik} n_k dV = \int_{V(t_1)} T^{ik} n_k dV \iff p^i = \frac{1}{c}\int_{V(t)} T^{i0} dV = \text{const} \tag{2.27}$$

Представим векторы напряжённости электрического и магнитного полей, входящих в (2.21), в виде разложения по плоским волнам:

$$\begin{aligned} \vec{E}\,(\vec{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d\vec{k}\big[\vec{E}(\vec{k})e^{\left(i\vec{k}\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t\right)} + \vec{E}^*(-\vec{k})e^{-\left(i\vec{k}\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t\right)}\big] \\ \vec{H}\,(\vec{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d\vec{k}\big[\vec{H}(\vec{k})e^{\left(i\vec{k}\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t\right)} + \vec{H}^*(-\vec{k})e^{-\left(i\vec{k}\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t\right)}\big] \end{aligned} \tag{2.28}$$

Подразумевается, что:

$$\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|,\ \vec{H}(\vec{k}) \perp \vec{E}(\vec{k}),\ \vec{H}(\vec{k}) \times \vec{E}(\vec{k}) \| \vec{k},\ |\vec{H}(\vec{k})| = |\vec{E}(\vec{k})|, \tag{2.29}$$

в соответствии с требованиями уравнений Максвелла. Фурье-амплитуды $\vec{E}(\vec{k})$ определяются с помощью обратного преобразования Фурье следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{k})e^{-i\omega_{\vec{k}}} + \vec{E}^*(-\vec{k})e^{i\omega_{\vec{k}}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d\vec{r}\vec{E}\,(\vec{r},t)\,e^{-i\vec{k}\vec{r}} \tag{2.30}$$

Подставим выражение (2.28) в (2.21). При возведении в квадрат векторов в (2.28) получаем, например, для напряжённости электрического поля:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t)^2 &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int d\vec{k}d\vec{k'}\vec{E}(\vec{k})\vec{E}(\vec{k'})e^{\left(i(\vec{k}+\vec{k'})\vec{r}-(\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}})t\right)} \\ &+\vec{E}(\vec{k})\vec{E}^*(-\vec{k'})e^{\left(i(\vec{k}-\vec{k'})\vec{r}-(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}})t\right)} \ + \ \text{c.c.} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Воспользуемся известным представлением δ - функции:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{r}e^{\left(i(\vec{k}-\vec{k'})\vec{r}\right)} = \delta\left(\vec{k}-\vec{k'}\right) \tag{2.32}$$

В результате, пренебрегая быстро осциллирующими слагаемыми и используя (2.29), получаем энергию и импульс поля, выраженные через Фурье-амплитуду:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi}\int|\vec{E}\left(\vec{k}\right)|^2 d\vec{k},\ \vec{p} = \frac{1}{2\pi c}\int|\vec{E}\left(\vec{k}\right)|^2\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}d\vec{k}. \tag{2.33}$$

Таким образом, с учетом основных формул (6) итоговое выражение для ЛИМ классических ЭМИ (8) и (6) имеет вид:

$$m^2 = \frac{1}{(2\pi c^2)^2}\left[\left(\int|\vec{E}\left(\vec{k}\right)|^2 d\vec{k}\right)^2 - \left(\int|\vec{E}\left(\vec{k}\right)|^2\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}d\vec{k}\right)^2\right] \tag{2.34}$$

В случае ЭМИ, обладающих аксиальной симметрией, выражение для массы можно упростить. Фурье-образ аксиально-симметричных ЭМИ $\vec{E}(\vec{k})$ зависит только от абсолютной величины поперечной компоненты волнового вектора $\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}\left(k_\perp,k_z\right)$. Выражение для ЛИМ таких симметричных ЭМИ выглядит наиболее просто:

$$\begin{aligned} m^2 = \frac{1}{(2\pi c^2)^2}\Bigg[&\int|\vec{E}\left(\vec{k}\right)|^2\left(1-\frac{k_z}{|k|}\right)d\vec{k} \\ &\times\int|\vec{E}\left(\vec{k}\right)|^2\left(1+\frac{k_z}{|k|}\right)d\vec{k}\Bigg] \end{aligned} \tag{2.35}$$

В следующей секции будут рассмотрены ЛИМ и эффект замедления для более сложных конфигурации ЭМИ, заданных на основе пучков Лагерра-Гаусса, Эрмита-Гаусса, Бессель-Гаусса и Эйри-Гаусса.

2.3 Лоренц-инвариантная масса и эффект замедления структурированных импульсов.

Чтобы задать классический ЭМИ с нетривиальной пространственно-временной конфигурацией (отличной от Гауссова ЭМИ), в данном разделе применяется общий подход нахождения поля по граничным условиям, где в явном виде не накладывается строгих условий, требуемых параксиальным приближением. Как будет показано, эффект замедления и величина ЛИМ наиболее ярко выражены именно в случае большой дифракционной расходимости.

Рассмотрим граничную задачу. Пусть напряженность электрического поля в плоскости $z = 0$ имеет вид:

$$\vec{E}_{\perp}\left(\vec{r}_{\perp},t,z=0\right) = \vec{A}\left(x,y\right) T\left(t,\omega_0\right). \tag{2.36}$$

Здесь $\vec{A}\left(x,y\right)$ – пространственная часть амплитуды как функция поперечных координат с определённым направлением поляризации. $T\left(t,\omega_0\right)$ – функция, описывающая зависимость от времени и несущей частоты ω. Вообще говоря, можно выбрать достаточно произвольный вид этой функции. В данном случае выбрана зависимость:

$$T\left(t,\omega_0\right) = T\left(t\right)\sin\left(\omega_0 t\right), \tag{2.37}$$

где $T\left(t\right)$ – финитная функция, представляющая собой временную огибающую конечной длительности. Как и ранее произведём преобразование Фурье (2.36), где Фурье-образ является функцией $\vec{k}_{\perp},\omega$.

$$\vec{E}_{\perp}\left(\vec{k}_{\perp},\omega\right)|_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{A}\left(x,y\right)e^{i\vec{k}_{\perp}\vec{r}}d\vec{r}_{\perp}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}T(t)\sin\left(\omega_0 t\right)e^{-i\omega t}dt. \tag{2.38}$$

Учитывая то, что в подобных задачах удобно оперировать с комплексным представлением электромагнитного поля (аналитический сигнал), выделяя действительную часть для нахождения поля, в данном случае необходимо придать корректную форму Фурье-образу поля (2.38). Для начала сфокусируем внимание

на Фурье-образе временной части $T(t, \omega_0)$ граничного условия:

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t) \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \tag{2.39}$$

В силу того, что $T(t) \sin(\omega_0 t)$ – действительная функция, на её Фурье-образ накладываются ограничения. Это наглядно продемонстрировано в следующей цепочке равенств:

$$\tilde{S}(\omega)^* = \int_{-\infty}^{\infty} T(t) \sin(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt = \tilde{S}(-\omega) \tag{2.40}$$

В качестве временной огибающей выбрана следующая финитная функция $T(t)$:

$$T(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, t_p] \\ 0, & \text{в другом случае,} \end{cases} \tag{2.41}$$

где t_p – длительность ЭМИ. Подставляя (2.41) в (2.38), после взятия интеграла и алгебраических преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega) = \frac{(-i)\, t_p}{2} e^{-\frac{i\omega t_p}{2}} \Big[e^{\frac{i\omega_0 t_p}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega_0 - \omega)\, t_p}{2} \right) \\ - e^{\frac{-i\omega_0 t_p}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega_0 + \omega)\, t_p}{2} \right) \Big], \end{aligned} \tag{2.42}$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \sin x / x$ Чтобы корректно оперировать с полем, используя комплексное представление (аналитический сигнал), необходимо изменить Фурье-образ временной функции следующим образом:

$$S(\omega) \longrightarrow \begin{cases} 2\tilde{S}(\omega) & \text{if } \omega \geq 0 \\ 0, & \text{в другом случае.} \end{cases} \tag{2.43}$$

Ширина $S(\omega)$ определяется длительностью импульса. Полагая $\omega_0 t_p \gg 1$, что означает достаточно большую длительность импульса, можно считать, что $S(\omega)$ сосредоточена в основном около центра ω_0 и имеет ширину $\sim 1/t_p$.

Заданная модель временной огибающей ЭМИ значительно отличается от рассмотренной ранее Гаусс-функции, промоделированной быстро осциллиру-

ющей функцией на несущей частоте $\exp\left(-\frac{t^2}{2t_p^2}\right)\sin(\omega_0 t)$. Основное различие заключается в том, что Фурье образ простой Гаусс-функции имеет только мнимую ненулевую часть, в то время как для финитных функций со строго конечной длительностью их Фурье-образ содержит как мнимую, так и действительную часть. Данный факт не влияет на расчёт ЛИМ одного когерентного ЭМИ, но может играть роль в случае рассмотрения суперпозиции импульсов, включая частично когерентные ЭМИ или ЭМИ с чирпом.

Вернёмся к рассмотрению граничных условий. Теперь основной задачей является нахождение поля во всём полупространстве $z \geq 0$. В общем виде для этого удобнее всего воспользоваться методами Фурье-оптики и рассмотреть передаточную функцию, которая задаётся выражением:

$$h\left(\vec{k}_\perp,\omega,z\right) = e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\vec{k}_\perp^2}z} \tag{2.44}$$

Стоит ещё раз отметить, что в контексте ЛИМ особенно удобно оперировать с Фурье-образами поля как функциями поперечных волновых векторов и частоты $\vec{k}_\perp, \omega$. При необходимости z-компонента волнового вектора может быть выражена как $k_z = \sqrt{\omega^2/c^2 - \vec{k}_\perp^2}$. Далее, направление распространения зафиксировано и подразумевается, что $k_z > 0$. Условие применимости параксиального приближения выглядит следующим образом: $|\vec{k}| \ll k_z$. Тем не менее, дальнейшее рассмотрение не опирается на параксиальное приближение. Поперечный размер w ЭМИ в плоскости $z = 0$ может принимать значения $w_0 < 50\lambda$ или $w_0 \sim \lambda_0$, что затрудняет получение аналитических формул. Все дальнейшие расчёты будут проводится численно. Таким образом, Фурье-образ поля в плоскости z определяется по заданному полю в плоскости $z = 0$ с помощью передаточной функции (2.44):

$$\vec{E}_\perp\left(\vec{k}_\perp,\omega\right) = h\left(\vec{k}_\perp,\omega,z\right)\vec{E}\left(\vec{k}_\perp,\omega\right)|_{z=0} \tag{2.45}$$

Уравнения Максвелла для свободного поля требуют выполнения условия $\mathrm{div}\left(\vec{E}_{\vec{r},t}\right) = 0$, что позволяет найти z-компоненту вектора напряжённости поля

$E_z\left(\vec{k_\perp},\omega\right)$:

$$E_z\left(\vec{k_\perp},\omega\right) = -\frac{k_x E_x\left(\vec{k}_\perp,\omega\right) + k_y E_y\left(\vec{k}_\perp,\omega\right)}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}_\perp^2}}, \tag{2.46}$$

Таким образом, получаем векторную структуру поля $\vec{E}\left(\vec{k}_\perp,\omega\right)$. Следующий шаг заключается в нахождении поля ЭМИ в произвольной точке полупространства $z \geq 0$ в произвольный момент времени. Это достигается с помощью обратного преобразования Фурье в (2.45), что даёт:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{E}\left(\vec{k}_\perp,\omega\right) e^{-i\vec{k}_\perp\vec{r}} e^{i\omega t} d\vec{k}_\perp d\omega \tag{2.47}$$

С учетом уравнений Максвелла магнитное поле имеет вид:

$$\vec{H}\left(\vec{r},t\right) = \int \left[\frac{c\vec{k} \times \vec{E}\left(\vec{k}_\perp,\omega\right)}{\omega}\right] e^{-i\vec{k}_\perp\vec{r}} e^{i\omega t} d\vec{k}_\perp d\omega, \tag{2.48}$$

где вектор $\vec{k} = \vec{k}_\perp + k_z\vec{e}_z$. Чтобы найти связь между Фурье-образами, зависящими от различных переменных, сделаем замену переменных в разложении (2.28). Это позволит найти соотношение между $\vec{E}(\vec{k})$ и $\vec{E}\left(\vec{k}_\perp,\omega\right)$.

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{\omega\vec{E}\left(\vec{k}_\perp,k_z\left(\omega\right)\right)}{c^2\sqrt{\omega^2/c^2 - \vec{k}_\perp^2}} \times e^{-i\sqrt{\omega^2/c^2-\vec{k}_\perp^2}z} e^{-i\vec{k}_\perp\vec{r}} e^{i\omega t} d\vec{k}_\perp d\omega \tag{2.49}$$

Сравнивая (2.49) и (2.47), получаем окончательно:

$$\vec{E}\left(\vec{k}_\perp,k_z\left(\omega\right)\right) = \vec{E}\left(\vec{k}_\perp,\omega\right)|_{z=0} \frac{c^2\sqrt{\omega^2/c^2 - \vec{k}_\perp^2}}{\omega}. \tag{2.50}$$

Знания $\vec{E}\left(\vec{k}_\perp,\omega\right)$ полностью достаточно для нахождения любых характеристик ЭМИ, в частности ЛИМ и средней скорости распространения. Как отмечалось выше, в случае аксиально-симметричных пучков, вычисления особенно просты,

так как необходимо найти только z-компоненту импульса p_z:

$$p_{z,\mathrm{sym}} = c \int |\vec{E}\left(\vec{k}_\perp, \omega\right)|^2_{z=0} \left(1 - \frac{\vec{k}_\perp^2 c^2}{\omega^2}\right) d\vec{k}_\perp d\omega \tag{2.51}$$

Используя (2.35), получаем ЛИМ для аксиально-симметричных ЭМИ:

$$m = \frac{1}{c^2}\sqrt{\varepsilon^2 - \frac{c^2 p_{z,\mathrm{sym}}^2}{4\pi^2}} \tag{2.52}$$

Рассмотрим модели ЭМИ, основанные на моделях пучков, которые также известны как структурированный свет. В качестве примеров выбраны пучки с аксиальной симметрией, такие как пучок Лагерра-Гаусса и Бессель-Гаусса. Для данных пучков пространственная часть ЭМИ в плоскости $z = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{LG}\left(\rho\right)|_{z=0} &= C_{LG}\vec{e}_\phi \left(\frac{\rho_\perp}{w_0}\right)^l e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2}} L_q^l\left(\frac{2\rho^2}{w_0^2}\right) e^{-il\phi} \\ \vec{A}_{BG}\left(\rho\right)|_{z=0} &= C_{BG}\vec{e}_\phi J_1\left(\beta\rho\right) e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2}}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

где C_{LG} и C_{BG} – нормировочные константы, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, w_0 – перетяжка ЭМИ в плоскости $z = 0$. $L_l^q\left(.\right)$ – обобщённые полиномы Лагерра, l,m – положительные целые числа, вектор поляризации задан в виде $\vec{e}_\phi$, что соответствует азимутальной поляризации.

Также рассматриваются пучки, без аксиальной симметрии. Один из них - пучок Эрмита-Гаусса:

$$A_{HG} = \vec{e}_{45^\circ} C_{HG} \mathcal{H}_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) e^{-\frac{x^2}{w_0^2}} \mathcal{H}_q\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0}\right) e^{-\frac{y^2}{w_0^2}}, \tag{2.54}$$

где l,q – целые числа, $\vec{e}_{45^\circ} = 1/\sqrt{2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$, что соответствует линейной поляризации. Также, рассматривается пучок Эйри-Гаусса:

$$A_{AG} = \vec{e}_{45^\circ} C_{AG} \mathcal{A}i\left(\frac{x}{w_0}\right) e^{-\frac{x^2}{w_0^2}} \mathcal{A}i\left(\frac{y}{w_0}\right) e^{-\frac{y^2}{w_0^2}}, \tag{2.55}$$

где $\mathcal{A}i\left(.\right)$ - функция Эйри.

Для некоторых из рассмотренных выше пространственных распределений поля можно найти аналитическое выражение их Фурье-образа. В случае пучка Лагерра-Гаусса:

$$F_{LG}\left(k_{\perp}\right)=2\pi C_{LG}w_0^2e^{il\phi}e^{i\pi q}\left(\frac{k_{\perp}w_0}{2}\right)^l$$
$$\times e^{-\frac{k_{\perp}^2w_0^2}{2}}L_q^l\left(\frac{k_{\perp}^2w_0^2}{2}\right)\vec{e}_{\phi} \tag{2.56}$$

Случай пучка Бессель-Гаусса:

$$\vec{F}_{BG}\left(k_{\perp}\right)=2\pi C_{BG}w_0^2e^{-\frac{(\beta^2+\vec{k}_{\perp}^2}{2})}I_1\left(k_{\perp}\beta w_0\right)\vec{e}_{\phi} \tag{2.57}$$

Наконец, для случая пучка Эрмита-Гаусса:

$$F_{HG}\left(k_x,k_y\right)=\pi w_0^2i^{l+q}e^{\frac{-k_{\perp}^2w_0^2}{4}}\mathcal{H}_l\left(\frac{k_xw_0}{\sqrt{2}}\right)\mathcal{H}_q\left(\frac{k_yw_0}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.58}$$

В случае пучка Эйри-Гаусса, расчёты проводились полностью численно.

Результат численного расчёта ЛИМ для всех типов пучков, для фиксированных параметров приведён на рисунке (2.4). Из рисунка следует, что для всех типов импульсов ЛИМ растёт с уменьшением размера перетяжки w_0 в плоскости $z=0$. Это объясняется тем, что чем меньше поперечный размер ЭМИ, тем сильнее проявляется дифракция, что в свою очередь связано с наличием больших углов между волновыми векторами лучей, формирующих ЭМИ. Этот факт находится в полном соответствии с предыдущими рассуждениями и результатами, описаными в данной работе.

Рассмотрим теперь эффект замедления (в соответствии с формулой (13)), который, как и следует ожидать, также наиболее ярко выражен для $w_0\leq 10\lambda$, что отражено на рисунке (2.5). Очевидно, что чем больше перетяжка, тем ближе ЭМИ к плоской волне. Рассмотрим ЛИМ как функцию энергии для различных типов ЭМИ. Результаты представлены на графике (2.6) Как видно из графика, для каждого конкретного типа ЭМИ его Лоренц-инвариантная масса зависит от энергии линейно, и, как следствие, скорость распространения такого импульса определяется его пространственно-временной структурой и не зависит от его энергии, т.е. в некотором смысле является универсальным свойством

ЭМИ. Более того ЛИМ не зависит и от длительности импульса (при фиксированных остальных параметрах), по крайней мере, в случае факторизованных граничных условий. Влияние конфигурации (структуры) в рамках отдельных типов ЭМИ представлено на примерах ЭМИ Эрмита-Гаусса - рисунок (2.7) и Лагерра-Гаусса - рисунок (2.8). Заметим, что результаты данной главы полностью согласуются с рассуждениями, приведёнными в главе 1 касательно способа измерения с помощью фокусировки и дефокусировки ЭМИ. Наличие ЛИМ полностью определяется его геометрической структурой и тем, насколько сильно ЭМИ отличается от плоской волны. Очевидно, что для более сложных конфигураций, для которых параксиальное приближение нарушается ещё значительнее (что, например, не позволяет рассматривать факторизованные граничные условия на подобие (2.36)), эффекты связанные с замедлением и наличием ЛИМ будут проявляться ещё сильнее. Пример таких импульсов – ультра-короткие импульсы. В приложении А приведены наглядные результаты моделирования ЭМИ различной конфигурации, а так же расчёт их ЛИМ и средней скорости распространения.

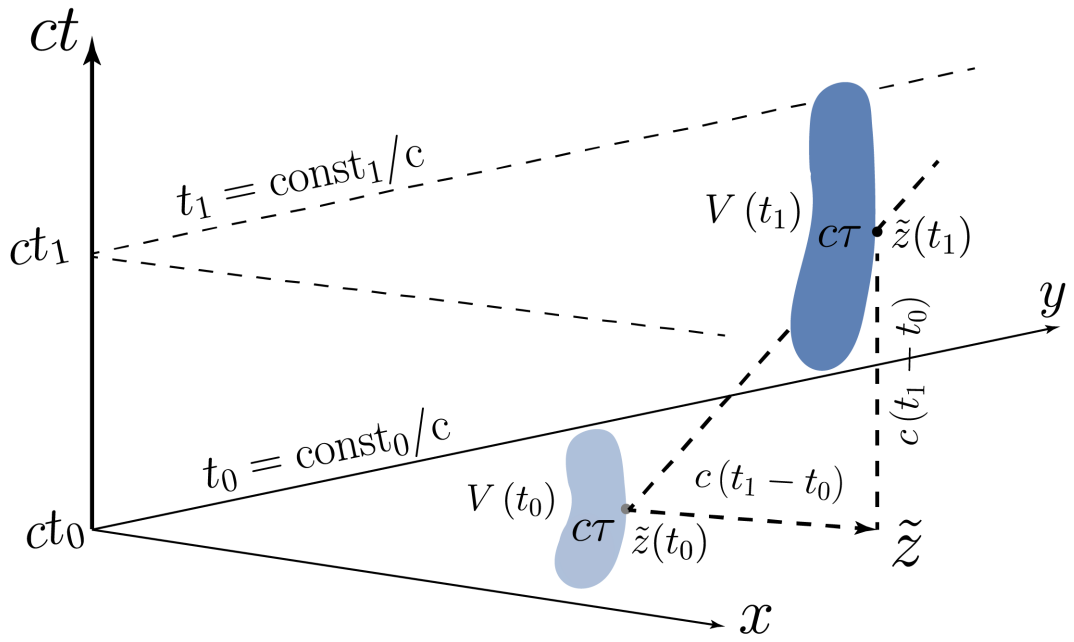

Рисунок 2.3 — Схематическая иллюстрация локализованного ЭМИ в пространстве и во времени. На рисунке рассмотрены два момента времени, которые определяют соответствующие гиперплоскости $t_0 = \mathrm{const}_0/\mathrm{c}$ и $t_1 = \mathrm{const}_1/\mathrm{c}$. Закрашенные области соответствует конечному объёму, занимаемому ЭМИ со строго конечной длительностью $c\tau$. Импульс распространяется вдоль оси $\tilde{z}$ (не изображена на рисунке). Точки $\tilde{z}(t_0)$ и $\tilde{z}(t_1)$ являются передними точки фронта ЭМИ, лежащего на оси $\tilde{z}$, и по аналогии с Гаусс-импульсом, предполагается, что луч, проходящий через данные точки, проходит расстояние $c(t_1 - t_0)$ в трёхмерном пространстве. Таким образом, точки $\tilde{z}(t_0)$ и $\tilde{z}(t_1)$ лежат на световом конусе, одна из образующих которого изображена пунктирной прямой, проходящей через $\tilde{z}(t_0)$ и $\tilde{z}(t_1)$. Плоскости $t_0 = const_0$ и $t_1 = const_1$, соответствуют срезам для различных областей z, что схематически проиллюстрировано в виде сдвига $\tilde{Z}$. См. также приложение А, где проиллюстрированы результаты моделирования различных импульсов.

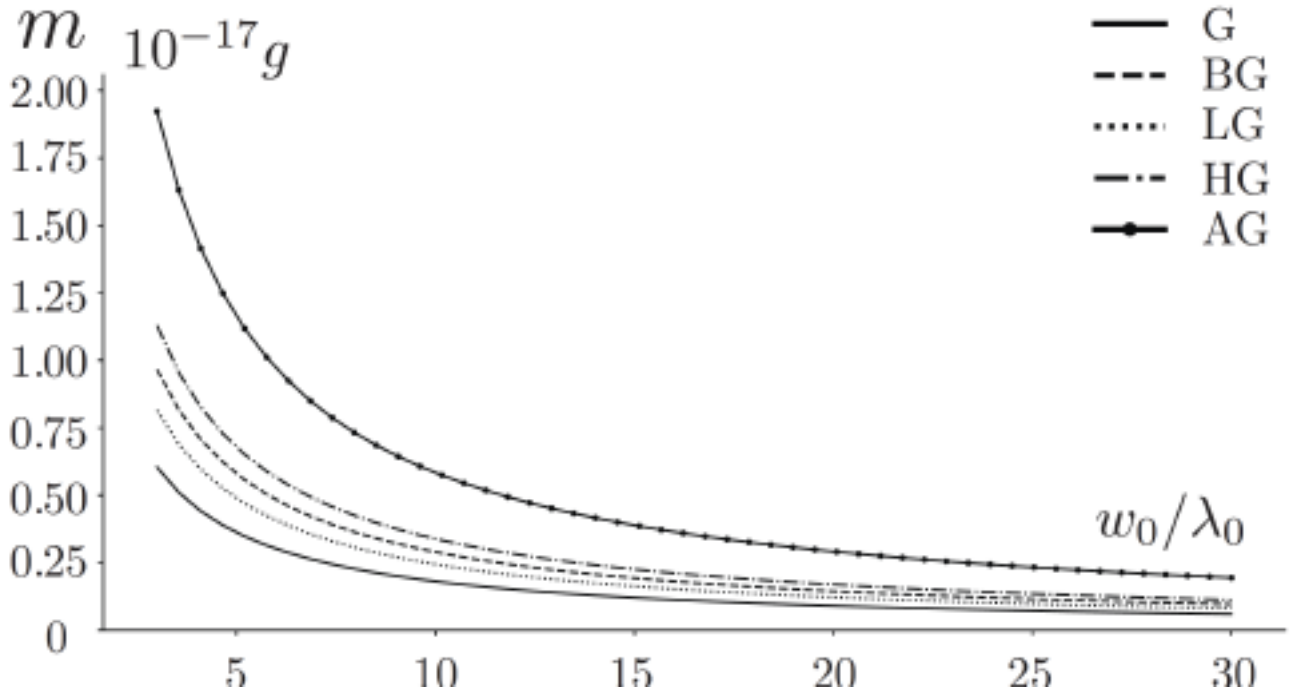

Рисунок 2.4 — ЛИМ Гауссова(G), Лагерр-Гауссова(LG, $l = 1, q = 1$), Бессель-Гауссова(BG), Эрмит-Гауссова(HG, $l = 1, q = 1$) и Эйри-Гауссова(AG) типов ЭМИ. w_0 – перетяжка импульса в плоскости $z = 0$, измеренная в несущих длинах волн $\lambda_0 = 404$ нм. Численные расчёты были проведены при фиксированной полной энергии импульса $\varepsilon = 10$ мДж и длительности $t_p = 0.539$ пс или 400 периодов несущей частоты. Параметры подобраны из соображений удобства расчётов и наглядности.

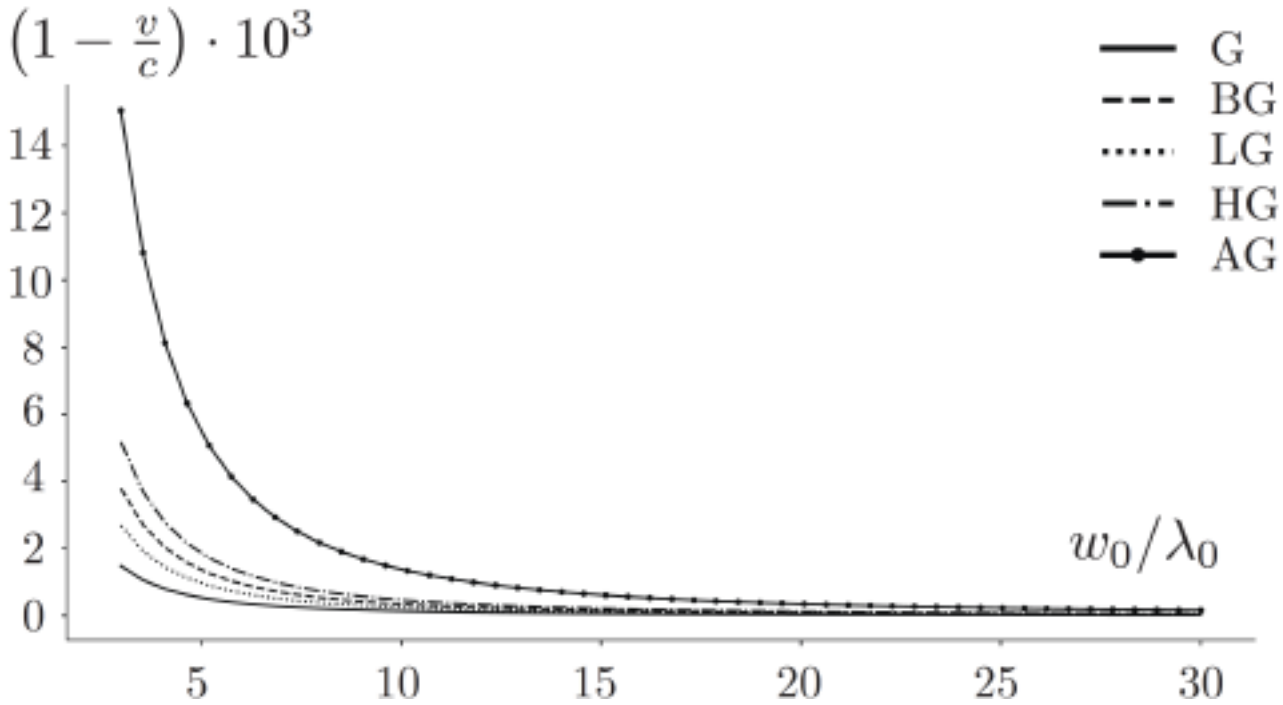

Рисунок 2.5 — Относительное отклонение средней скорости распространения от скорости света в вакууме для Гауссова (G), Лагерр-Гауссова (LG, $l = 1, q = 1$), Бессель-Гауссова (BG) и Эрмит-Гауссова (HG, $l = 1, q = 1$) импульсов, как функция от длины перетяжки, измеренная в несущих длинах волн $\lambda_0 = 404$ нм. Численные расчёты были проведены при фиксированной полной энергии импульса $\varepsilon = 10$ мДж и длительности $t_p = 0.539$ пс или 400 периодов несущей частоты.

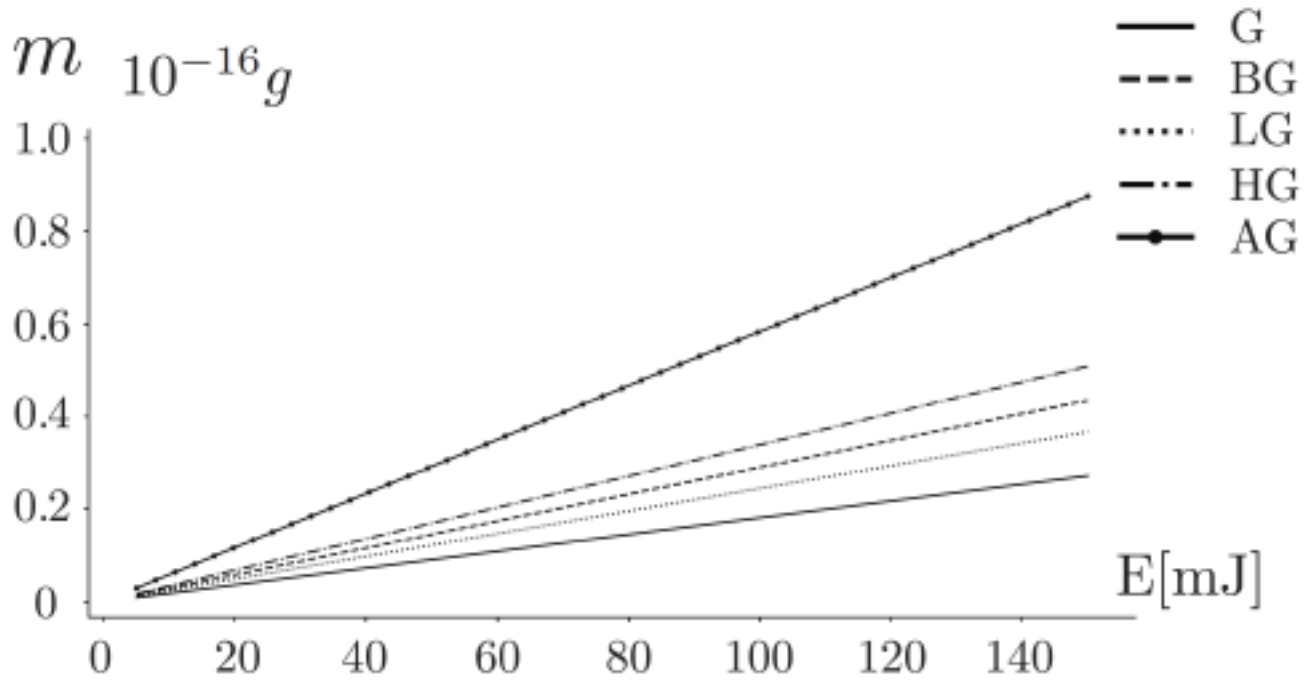

Рисунок 2.6 — ЛИМ как функция энергии для различных типов импульсов. В данном случае длительность, несущая частота, и перетяжка импульса $w_0 = 10\lambda_0$ в плоскости $z = 0$ зафиксированы. Видно, что ЛИМ линейно зависит от энергии, что в свою очередь означает независимость средней скорости распространения от энергии. Результаты расчётов приведены для Гаусс (G), Лагерр-Гаусс (LG, $l = 1, q = 1$), Бессель-Гаусс (BG) и Эрмит-Гаусс (HG, $l = 1, q = 1$. Как и раннее, длительность $t_p = 0.539$ пс или 400 периодов несущей частоты.

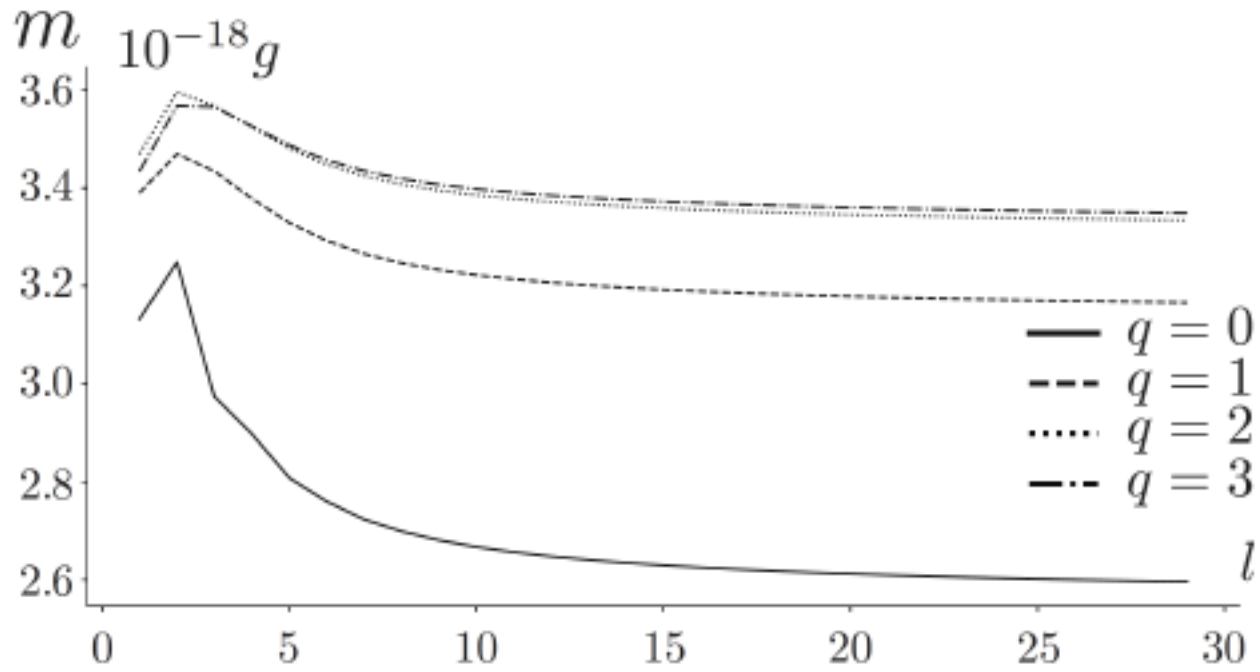

Рисунок 2.7 — ЛИМ для случая ЭМИ Эрмита-Гаусса как функция параметров l для различных параметров q. Полной энергии импульса $\varepsilon = 10$ мДж и длительности $t_p = 0.539$ пс, перетяжка $w_0 = 10\lambda_0$.

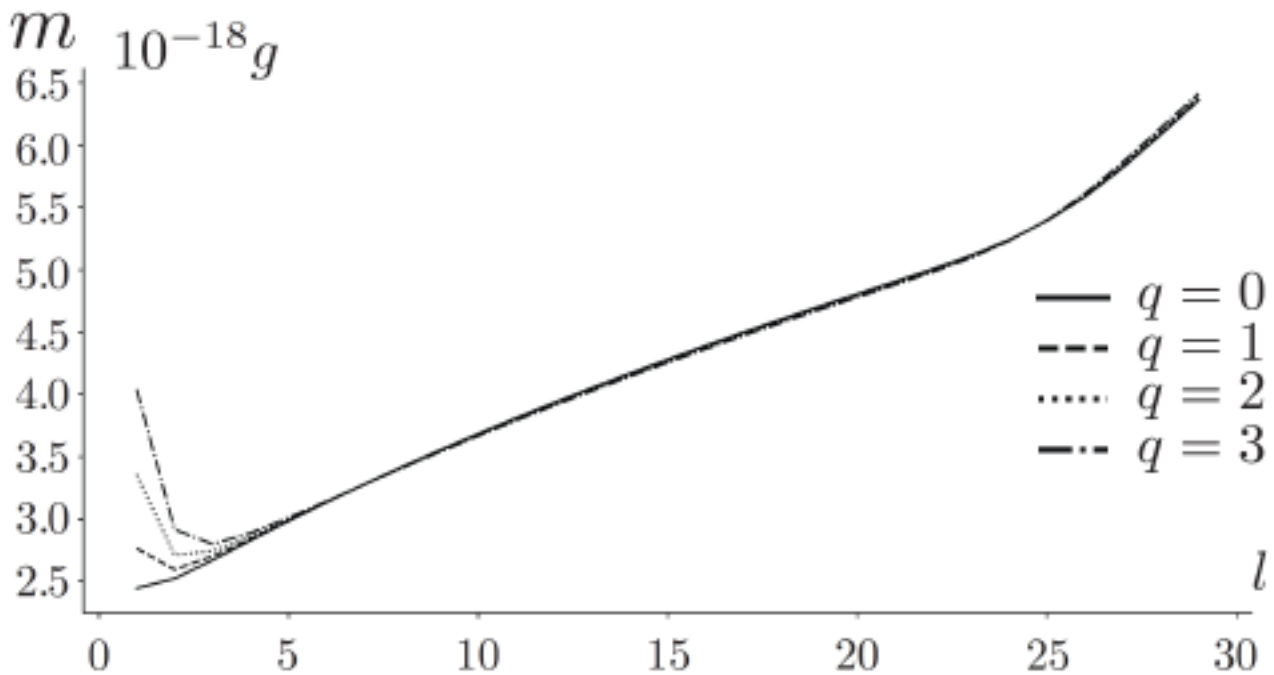

Рисунок 2.8 — ЛИМ для случая ЭМИ Лагерра-Гаусса как функция параметров l для различных параметров q. Полной энергии импульса $\varepsilon = 10$ мДж и длительности $t_p = 0.539$ пс, перетяжка $w_0 = 10\lambda_0$.

Глава 3. Лоренц инвариантная масса и перепутывание бифотонных состояний.

Во введении была рассмотрена система двух фотонов и их ЛИМ, обсуждался способ измерения эффекта замедления, основанный на эффекте ХОМ, где фотоны рождались в процессе СПРС. Фотоны, рождённые в различных режимах СПРС, находятся в перепутанном состоянии, где степень их перепутывания можно определить с помощью параметра Шмидта или с помощью параметра Фёдорова, который легко измеряется в эксперименте. Перепутывание и ЛИМ напрямую зависят от того, какой вид имеет волновая функция бифотонов в зависимости от волновых векторов частиц. Цель данной главы – понять связь между ЛИМ и перепутыванием состояний бифотонов, определить режимы СПРС, для которых данная связь проявляется наиболее существенно.

Рассмотрим систему фотонов, рождённых в нелинейном двулучепреломляющем кристалле под действием классической накачки в процессе СПРС. Так как накачка является классическим ЭМИ, то в качестве опорной точки для сравнения с ЛИМ бифотонов найдём её ЛИМ в пересчёте на один фотон. В качестве модели накачки рассмотрим Гауссов ЭМИ, масса которого

$$m_{p\,\mathrm{tot}} = \mathcal{E}_p \, \frac{\lambda_p}{2\pi c^2 w_p}. \tag{3.1}$$

Здесь $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ – энергия пучка накачки в лабораторной ИСО, w_p – размер перетяжки. Полагается приближённо $\mathcal{E}_\mathrm{p} = N\hbar\omega_p$, где N - число фотонов в ЭМИ накачки. Из выражения (3.1) можно найти ЛИМ в расчёте на один фотон:

$$m_p = \frac{\hbar}{c\, w_p} \tag{3.2}$$

Качественно это выражение можно получить из выражений, рассматриваемых во введении и главе (1): (15) и (1.40), (1.41) для массы ЭМИ, представимого как совокупность фотонов, если положить угол θ равным углу дифракционной расходимости $\theta = \lambda_p/w_p \ll 1$. Так как $w_p \gg \lambda_p$, ЛИМ накачки в расчёте на один фотон может быть значительно меньше массы системы двух неколлине-

арных фотонов.

Рассмотрим случай частотно вырожденного режима СПРС с синхронизмом типа 1, где накачка распространяется в среде в виде необыкновенной волны, в то время как оба излучённых (испущенных в результате распада фотона накачки) фотона находятся в модах с обыкновенной поляризацией. Если накачка имеет вертикальную поляризацию, то оба излучённых фотона имеют горизонтальную поляризацию. Пусть частота накачки равна ω_p, а частоты обоих излучённых фотонов равны $\omega_p/2$. Пусть ось Oz будет центральной осью распространения накачки, а её поперечное распределение ($\perp Oz$) будет иметь вид Гаусс-функции с шириной w_p: $E_p \propto \exp(-\vec{r}_{\perp p}^{\,2}/2w_p^2)$. Волновая функция излучённых фотонов в импульсном представлении зависит от поперечных компонент импульсов $\vec{k}_{\perp 1}$ и $\vec{k}_{\perp 2}$ фотонов следующим образом:

$$\Psi(\vec{k}_{\perp 1}, \vec{k}_{\perp 2}) = N \exp\left[-\frac{\left(\vec{k}_{\perp 1} + \vec{k}_{\perp 2}\right)^2 w_p^2}{2}\right] \times \\ \operatorname{sinc}\left[\frac{L\lambda_p}{8\pi n_o}\left(\vec{k}_{\perp 1} - \vec{k}_{\perp 2}\right)^2\right], \tag{3.3}$$

где $\operatorname{sinc} = \frac{\sin x}{x}$, L – длина кристалла (вдоль оси z), n_o – показатель преломления обыкновенной волны в кристалле, N – нормировочный коэффициент. Заметим, что анизотропия показателя преломления необыкновенной волны n_p может внести дополнительный член в аргумент sinc - функции:

$$f_{\text{anisotr}}(\vec{k}_{\perp 1}, \vec{k}_{\perp 1}) = L n_p'(k_{1\,x} + k_{2\,x})/4\pi, \tag{3.4}$$

где n_p' – производная показателя преломления по углу ϑ между волновым вектором накачки и оптической осью кристалла OA. Предполагается, что оптическая ось OA находится в плоскости (x,z). Если член f_{anisotr} не мал (~ 1), то он играет важную роль в получении аномально большой степени углового перепутывания фотонов в СПРС [117],[118]. В рассматриваемом случае предполагается, что член f_{anisotr} мал и может быть проигнорирован. Это условие выполняется если $L|n_p'| \ll w_p$, где обычно $|n_p'| \sim 0.1$, что, вообще говоря, может повлиять на величину ЛИМ. С помощью волновой функции (3.3) найдём среднее значение импульса бифотонов $\hbar\,\langle\vec{k}_1 + \vec{k}_2\rangle$. В силу аксиальной симметрии, поперечные

компоненты равны $\langle \vec{k}_{\perp 1} + \vec{k}_{\perp 2} \rangle = 0$, в то время как продольная компонента с учетом параксиального приближения имеет вид:

$$\langle k_{z\,1} + k_{z\,2} \rangle = \frac{\omega_p}{c} - \frac{c}{2\omega_p} \left[\langle (\vec{k}_{\perp 1} + \vec{k}_{\perp 2})^2 \rangle + \langle (\vec{k}_{\perp 1} - \vec{k}_{\perp 2})^2 \rangle \right] = \frac{\omega_p}{c} - \frac{c}{2\omega_p} \left[\langle \vec{q}_+^{\,2} \rangle + \langle \vec{q}_-^{\,2} \rangle \right], \tag{3.5}$$

где $\vec{q}_\pm = \vec{k}_{\perp 1} \pm \vec{k}_{\perp 2}$. В терминах $2D$-векторов $\vec{q}_+$ и $\vec{q}_-$ их среднее $\langle ... \rangle = \frac{1}{4} \int d\vec{q}_+ d\vec{q}_- |\Psi|^2 (...)$, $\frac{1}{4}$ – Якобиан перехода от переменных $\vec{k}_{\perp 1}, \vec{k}_{\perp 2}$ к q_+, q_-. В итоге для квадрата волновой функции (3.3) получаем:

$$|\Psi|^2 = N^2 \exp\left(-\vec{q}_+^{\,2} w_p^{\,2}\right) \mathrm{sinc}^2 \left[\frac{L\lambda_p}{8\pi n_o} \vec{q}_-^{\,2} \right], \tag{3.6}$$

где полученное выражение факторизуется относительно переменных $\vec{q}_+$ и $\vec{q}_-$, что удобно для вычисления средних значений.

С учетом условия нормировки волновой функции, нормировка N вычисляется как:

$$\frac{1}{4} \int d\vec{q}_+ \int d\vec{q}_- |\Psi|^2 = 1. \tag{3.7}$$

Интегралы по $\vec{q}_+$ и $\vec{q}_-$ в (3.6) по отдельности равны:

$$\int d\vec{q}_+ \exp\left(-\vec{q}_+^{\,2} w_p^{\,2}\right) = \pi / w_p^2$$
$$\int d\vec{q}_- \mathrm{sinc}^2 \left[\frac{L\lambda_p}{8\pi n_o} \vec{q}_-^{\,2} \right] = \frac{8\pi^2 n_o}{L\lambda_p} \int_0^\infty dx\, \mathrm{sinc}^2(x) = \frac{4\pi^3 n_o}{L\lambda_p}, \tag{3.8}$$

где учтено, что $\int_0^\infty dx\, \mathrm{sinc}^2(x) = \pi/2$. Комбинируя вместе полученные результаты расчётов (3.7),(3.8) и используя (3.6) получаем равенство для константы нормировки N:

$$N = \frac{w_p}{\pi^2} \sqrt{\frac{L\lambda_p}{n_o}}. \tag{3.9}$$

Далее, найдём выражения для средних $\langle \vec{q}_+^{\,2} \rangle$ и $\langle \vec{q}_-^{\,2} \rangle$ в уравнении (3.5). Значение $\langle \vec{q}_+^{\,2} \rangle$ определяется через интеграл от экспоненциальной функции в выражении (3.6), что даёт:

$$\langle \vec{q}_+^{\,2} \rangle = \frac{1}{w_p^2}. \tag{3.10}$$

Слагаемое $\langle \vec{q}_-^{\,2} \rangle$ может быть сведено к следующему интегралу:

$$\langle \vec{q}_-^{\,2} \rangle = \frac{8\pi n_o}{L\lambda_p} \int_0^\infty x \,\mathrm{sinc}^2(x)\, dx, \tag{3.11}$$

где x – переменная интегрирования, равная аргументу sinc-функции в уравнении (3.6). Интеграл в (3.11) расходится логарифмически при $x \to \infty$, но данная расходимость связана с использованием параксиального приближения. Фактически, данное приближение верно, если имеют место условия:

$$|k_{\perp\,1,2}| \ll \frac{\omega_p}{2c},\ |q_-| \ll \frac{\omega_p}{c},\ x \ll x_{\max} = \frac{L\lambda_p}{8\pi n_o}(\frac{\omega_p}{c})^2. \tag{3.12}$$

Таким образом, для интегралов в выражении (3.11) можно привести следующую оценку, исходя из применимости условий (3.12):

$$\int_1^{x_{\max}} \overline{\sin^2 x}\, dx/x = \frac{1}{2}\ln(x_{\max}) \tag{3.13}$$

Используя полученные результаты, итоговый результат для $\langle \vec{q}_-^{\,2} \rangle$ можно задать равенством:

$$\langle \vec{q}_-^{\,2} \rangle = \frac{4\pi n_o}{L\lambda_p} \ln\left(\frac{\pi L}{2n_o\lambda_p}\right). \tag{3.14}$$

Скомбинированные вместе (3.5), (3.10) и (3.14) задают следующее выражение для среднего импульса бифотона (умноженного на константу скорости света в вакууме c):

$$\langle c(p_{z\,1} + p_{z\,2}) \rangle = \hbar\omega_p - c\,\delta p, \tag{3.15}$$

где δp задаётся выражением:

$$\delta p = \frac{\hbar\, c}{2\omega_p}\left[\frac{1}{w_p^2} + \frac{4\pi n_o}{L\lambda_p}\ln\left(\frac{\pi L}{2n_o\lambda_p}\right)\right]. \tag{3.16}$$

Очевидно, что длина волны накачки $\lambda_p \ll \{w_p,\, L\}$, в любом случае $c\delta p \ll \hbar\omega_p$, и, так как энергия бифотона $\mathcal{E}_{\mathrm{bph}}^2 = (\hbar\omega_p)^2$, то:

$$\mathcal{E}^2 - \langle c(p_{z\,1} + p_{z\,2}) \rangle^2 \ \approx\ 2\hbar\omega_p c\,\delta p \tag{3.17}$$

Таким образом, окончательное выражение для ЛИМ имеет вид:

$$m_{\text{biph}} = \frac{\hbar}{c}\left[\frac{1}{w_p^2} + \frac{4\pi n_o}{L\lambda_p}\ln\left(\frac{\pi L}{2n_o\lambda_p}\right)\right]^{1/2}. \tag{3.18}$$

Поперечные импульсы бифотонов $\vec{k}_{\perp 1}$ и $\vec{k}_{\perp 2}$ представляют собой $2D$-непрерывные переменные. Степень перепутывания для поперечных переменных может быть найдена [119] с помощью параметра Шмидта K. Расчёт K особенно прост в случае волновых функций, представляющих собой двойные Гаусс-функции. Для произвольных волновых функций его нахождение может быть затруднено, но существует способ экспериментального определения данного параметра. Он состоит в определении соотношения ширин безусловной и условной плотностей вероятностей детектирования фотонов, зависящих от переменных одной или двух частиц. Данный параметр известен как параметр Фёдорова R, который в в некоторых случаях в точности совпадает с параметром Шмидта K [120] или близок к нему [121]. В эксперименте необходимо расщепить исходный пучок фотонов на два канала и проделать два типа измерений. В первом случае, измерения проводятся с помощью детектора, считывающего фотоны в сканирующем режиме только для одного канала, где строятся одночастичные распределения. Во втором типе измерений, используются детекторы, расположенные в разных каналах, где один осуществляет сканирование, а другой сохраняет постоянную позицию. Схема измерений настроена так, что учитываются только совпадающие сигналы. В таком режиме измерений получают плотность условного распределения и измеряют его ширину. Отношение ширин распределений в обоих типах измерений и есть параметр Фёдорова R.

Квадрат волновой функция имеет вид произведения двух слагаемых, одно из которых зависит от суммы, а другое от разности переменных. Если обозначить ширины этих распределений как a и b соответственно, то ширины, получаемые в измерениях по схеме совпадений и одночастичных измерениях, равны соответственно $\min\{a, b\}$ и $\max\{a, b\}$. Следовательно, параметр Фёдорова равен $R = \max\{a, b\}/\min\{a, b\}$. Применяя этот метод к волновой функции (3.3),

зависящей от $k_{1,x}$, $k_{2,x}$, получаем:

$$a = 1/w_p,\ b = 2\pi\sqrt{n_o/L\lambda_p} \tag{3.19}$$

Применим рассмотренное выше определение степени перепутывания, заданное с помощью числа Шмидта и параметра Фёдорова, к бифотонам, рассматриваемым в рамках настоящего раздела:

$$K \sim R = \frac{\Delta k_{1,x}^{(s)}}{\Delta k_{1,x}^{(c)}} \sim \frac{\max\left\{1/w_p\,, 2\pi\sqrt{n_o/L\lambda_p}\right\}}{\min\left\{1/w_p\,, 2\pi\sqrt{n_o/L\lambda_p}\right\}}. \tag{3.20}$$

Как видно из выражения (3.20), степень перепутывания значительно увеличивается (по сравнению, например с $K = 1$, когда перепутывание отсутствует вовсе), если выполнены условия $w_p \ll \sqrt{L\lambda_p}$ или $w_p \gg \sqrt{L\lambda_p}$. Для второго из данных условий предполагается, что кристалл тонкий по сравнению с дифракционной длиной накачки $L \ll w_p^2/\lambda_p \equiv L_d$. При выполнении данного условия имеет место следующее выражение для степени перепутывания:

$$K \sim R_{\text{short L}} \sim \frac{2\pi w_p\sqrt{n_o}}{\sqrt{L\lambda_p}} \gg 1. \tag{3.21}$$

Сравнение полученного (3.21) выражения и (3.18) позволяет установить связь между ЛИМ и степенью перепутывания:

$$\begin{aligned} m_{\text{biph}} &= \frac{\hbar}{c\,w_p}\left[1 + \frac{K^2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi L}{2n_o\lambda_p}\right)\right]^{1/2} \\ &\approx \frac{\hbar K}{2c\,w_p}\sqrt{\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi L}{2n_o\lambda_p}\right)} \gg \frac{\hbar}{2c\,w_p}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Как видно из (3.22), в случае если $L \ll w_p^2/\lambda_p \equiv L_d$, ЛИМ бифотонного состояния (3.3) и степень перепутывания K прямо пропорциональны друг другу. Тем не менее, такая связь не является универсальной. В случае сильно сфокусированной накачки $L \gg L_d = w_p^2/\lambda_p$ степень перепутывания также высока: $K \sim \sqrt{L/L_d} \gg 1$, но в таком случае ЛИМ согласно (3.18) почти не зависит от степени перепутывания и определяется через обратную длину перетяжки пучка накачки $m_{\text{biph}} = \hbar/c\,w_p$. Таким образом, приведенный анализ позволя-

ет заключить, что существуют условия (режимы СПРС), при которых система двух фотонов обладает большим перепутыванием и большой ЛИМ и эти величины прямо пропорциональны друг другу. Прямые измерения ЛИМ для бифотонов весьма сложны, но могут быть сделаны косвенно, например, посредством измерения средней скорости распространения, основанной на квантовой интерферометрии. Таким образом, предложенная взаимосвязь формирует альтернативную возможность измерения ЛИМ системы двух фотонов и эффекта замедления.

Глава 4. Режимы спонтанного параметрического рассеяния света и квантовая интерферометрия

Настоящая глава посвящена квантовой интерференции состояний бифотонов на основе эффекта ХОМ. Показаны способы того, как можно подобрать специальный режим СПРС, в котором возникают осцилляции, приводящие к подавлению эффекта ХОМ. Косвенные измерения ЛИМ и средней скорости распространения бифотонов, основанные на эффекте квантовой интерференции, требуют знания режимов процесса СПРС для максимальной эффективности и точности измерений. В данной секции рассматриваются особенности квантовой интерференции в схеме ХОМ в зависимости от параметров, определяющих различные режимы СПРС. Решение данной задачи достигается с помощью нахождения вероятностей детектирования фотонов в ХОМ в зависимости от параметров невырожденности и неколлинеарности.

Общий вид волновой функции бифотонов в процессе СПРС с синхронизмом типа 1 имеет вид:

$$\Psi = C_N E_p \left(\vec{k}_{\mathrm{p}}\right) \operatorname{sinc}(L\Delta/2), \tag{4.1}$$

где E_p и Δ – амплитуда напряжённости поля накачки и фазовая отстройка соответственно, C_N – нормировка волновой функции. В общем случае E_p и Δ зависят от угловых и частотных переменных обоих испущенных фотонов. Предполагается, что спектр накачки и испущенных фотонов узкий и сконцентрирован около соответствующих центральных частот $\omega_p^{(c)} \equiv \omega_0, \omega_1^{(c)} = \omega_h$ (верхняя) и $\omega_2^{(c)} = \omega_l$ (нижняя). В общем случае центральные частоты испущенных фотонов ω_h и ω_l могут быть различными, но их сумма должна быть равна центральной частоте накачки $\omega_h + \omega_l = \omega_0$, что отражает закон сохранения в процессе СПРС. Случай $\omega_h \neq \omega_l$ соответствует частотно-невырожденному режиму СПРС. Степень невырожденности можно охарактеризовать безразмерным параметром ξ $(0 \leq \xi < 1)$:

$$\xi = \frac{\omega_h - \omega_l}{\omega_0}. \tag{4.2}$$

В терминах данного параметра, частоты испущенных фотонов задаются в следующем виде:

$$\omega_{h,l} = \omega_0 \frac{1 \pm \xi}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_{\pm}^{(c)} = \frac{2\pi c}{\omega_{h,l}} = \frac{2\lambda_p^{(c)}}{1 \pm \xi}, \tag{4.3}$$

где $\lambda_+^{(c)}$ и $\lambda_-^{(c)}$ – центральные длины волн высокочастотного и низкочастотного фотонов. Для начала рассмотрим режим частотно-невырожденного коллинеарного режима СПРС с частотами испущенных фотонов, равными в точности ω_h и ω_l. В этом случае фазовая расстройка Δ задаётся выражением:

$$\Delta_0 = k_p - k_1 - k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_p} \left(n_p(\varphi_0) - n_{\text{eff}}^{(o)}(\xi) \right), \tag{4.4}$$

где k_p, k_1 и k_2 – абсолютные значения волновых векторов накачки и испущенных фотонов внутри кристалла соответственно, $n_p(\varphi_0)$ – показатель преломления волны накачки распространяющейся вдоль оси z, φ_0 – угол между оптической осью кристалла и осью Oz. Эффективный показатель преломления $n_{\text{eff}}^{(o)}(\xi)$ обыкновенной волны, введённый в (4.4), позволяет оперировать (4.4) и в случае частотно-вырожденного режима $\Delta_0^{\text{deg}} = (2\pi/\lambda_p)(n_p - n_o)$. Обозначим $n_o = n_o(2\lambda_p)$ – показатель преломления обыкновенной волны в зависимости от удвоенной длины волны накачки. Для невырожденного режима эффективный показатель преломления имеет вид

$$n_{\text{eff}}^{(o)}(\xi) = \frac{1+\xi}{2} n_o \left(\frac{2\lambda_p}{1+\xi} \right) + \frac{1-\xi}{2} n_o \left(\frac{2\lambda_p}{1-\xi} \right). \tag{4.5}$$

В качестве примера рассмотрим конкретные параметры накачки и кристалла BBO: $L = 0.5$ см, $\lambda_p = 0.4047$ мкм. Для данных параметров зависимость $n_{\text{eff}}^{(o)}(\xi)$ проиллюстрирована на рисунке (4.1). Откуда можно заключить, что максимальное значение параметра невырожденности ξ для испущенных фотонов в области прозрачности кристалла BBO равно $\xi_{\max} = 0.9391$ и соответствует максимально достигаемой длине волны для низко-частотных фотонов $\lambda_{-\max} = 13.29$ мкм. Если фазовая отстройка Δ_0 (4.4) становится равной нулю, то имеет место коллинеарный частотно-невырожденный режим СПРС, что эквивалентно условию $n_p(\varphi_0) = n_{\text{eff}}^{(o)}(\xi)$. Решение этого уравнения $\varphi_0^{(\text{Coll})}(\xi)$ приведено на рисунке (4.2). Все точки на кривой, соответствуют парам параметров (φ_0,ξ), для которых процесс СПРС является коллинеарным.

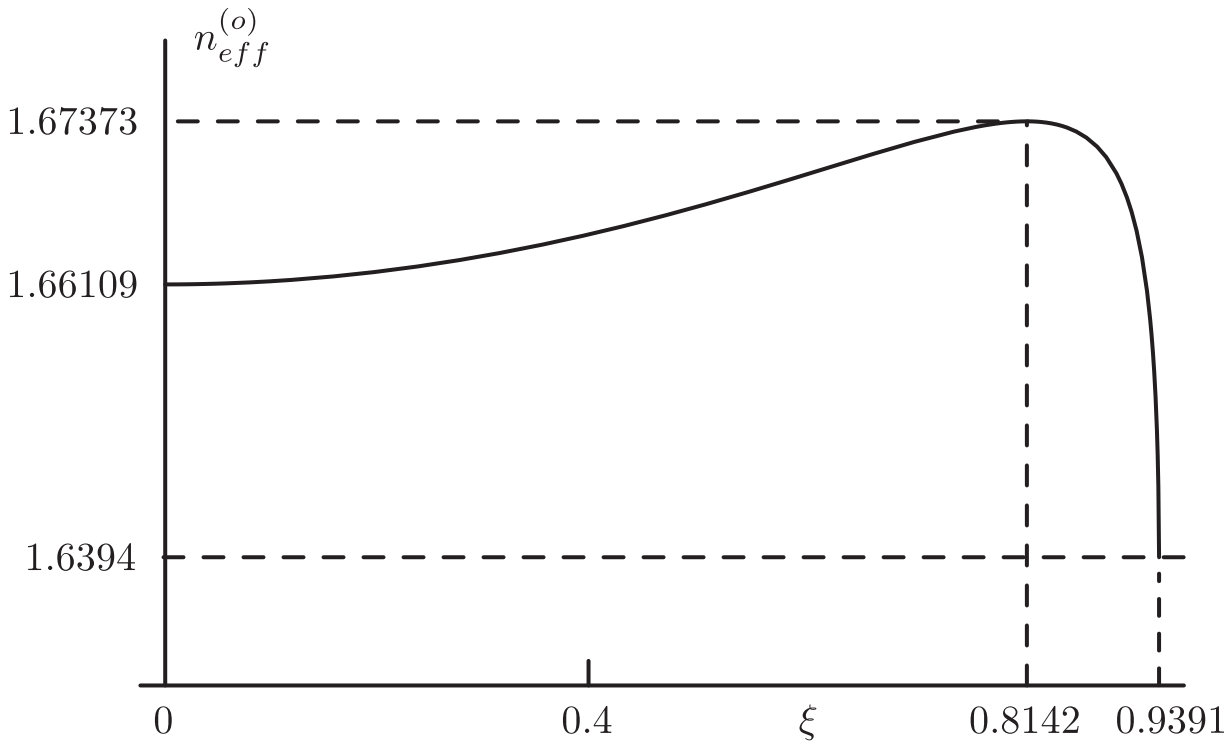

Рисунок 4.1 — Эффективный показатель преломления $n_{\text{eff}}^{(o)}$ как функция параметра невырожденности ξ

Таким образом, коллинеарный режим СПРС имеет место во всём интервале от $\varphi_{0\,\min}^{(\text{Coll})} = 0.37734$ до $\varphi_{0\,\max}^{(\text{Coll})} = 0.678486$, но только при выборе определённого значения параметра невырожденности.

Рассмотрим случай $\Delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_p}(n_p(\varphi_0) - n_{\text{eff}}^{(o)}(\xi)) < 0$. Данный отрицательный член может быть скомпенсирован положительным членом, определяемым первым членом разложения фазовой отстройки как функции поперечных компонент волновых векторов испущенных фотонов:

$$\Delta_1^{\perp} = \frac{(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp})^2}{8}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right). \tag{4.6}$$

Для любой выбранной плоскости (x,z) справедливы равенства:

$$k_{1,2\,x} = \frac{\pi}{\lambda_p}(1 \pm \xi)\theta_{1,2\,x} \equiv \frac{\pi}{\lambda_p}\widetilde{\theta}_{1,2\,x}, \tag{4.7}$$

где $\theta_{1,2\,x}$ – углы между направлением распространения испущенных фотонов и осью Oz в свободном пространстве вне кристалла. Обозначение $\widetilde{\theta}_{1,2\,x} = (1 \pm \xi)\,\theta_{1,2\,x}$ использовано для упрощения вида выражений в промежуточных

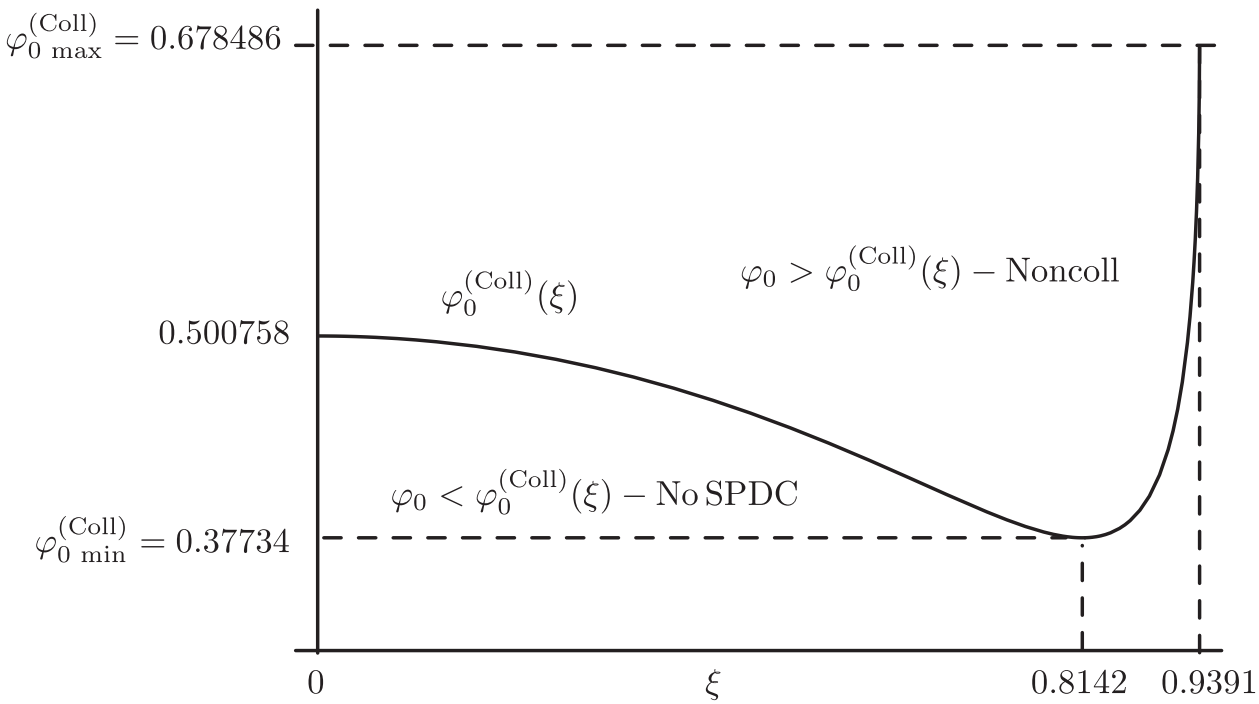

Рисунок 4.2 — Угол $\varphi_0^{(\mathrm{Coll})}$ в зависимости от (ξ) (между осью кристалла и направлением распространения накачки - осью $0z$), при котором процесс СПРС является коллинеарным, но частотно невырожденным. Если угол $\varphi_0 > \varphi_0^{(\mathrm{Coll})}$, то имеет место неколлинеарный и частотно-невырожденный режим СПРС. Для углов $\varphi_0 < 0.37734$ процесс СПРС невозможен для любого параметра невырожденности ξ.

выкладках. В отличии от $k_{1,2\,x}$, слагаемые $1/k_1$ и $1/k_2$ в (4.6) – абсолютные значения волновых векторов фотонов внутри кристалла. С учётом соответствующих показателей преломления для каждого волнового вектора получаем:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2\lambda_p}{\pi N_{\mathrm{eff}}(\xi)} \quad \Delta_1^{\perp} = \frac{\pi}{4\lambda_p} \frac{(\widetilde{\theta}_{1\,x} - \widetilde{\theta}_{2\,x})^2}{N_{\mathrm{eff}}(\xi)}, \tag{4.8}$$

где функция $N_{\mathrm{eff}}(\xi)$ задаётся выражением:

$$N_{\mathrm{eff}}(\xi) = \frac{(1-\xi^2) n_o\left(\frac{2\lambda_p}{1+\xi}\right) n_o\left(\frac{2\lambda_p}{1-\xi}\right)}{n_{\mathrm{eff}}(\xi)}, \tag{4.9}$$

Стоит отметить, что $\xi \neq 0$, $N_{\mathrm{eff}}(\xi) \neq n_{\mathrm{eff}}(\xi)$, хотя $N_{\mathrm{eff}}(0) = n_{\mathrm{eff}}(0) = n_o(2\lambda_p)$. Слагаемое Δ_0 (4.4) для фазовой отстройки удобно представить виде:

$$\Delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_p}(n_p(\varphi_0) - n_{\mathrm{eff}}^{(o)}(\xi)) = -\frac{\pi}{\lambda_p} \frac{\theta_0^2(\xi,\varphi_0)}{N_{\mathrm{eff}}(\xi)}. \tag{4.10}$$

Выражение (4.10) является определением функции $\theta_0^2(\xi,\varphi_0)$, которая явно задаётся в следующей форме:

$$\theta_0^2(\xi,\varphi_0) = 2N_{\text{eff}}(\xi)\left(n_{\text{eff}}^{(o)}(\xi) - n_p(\varphi_0)\right). \tag{4.11}$$

Выражения (4.8) и (4.10) объединённые вместе позволяют определить зависимость sinc-функции от угловых переменных в волновой функции (4.1):

$$\Psi_{\text{sinc}} \propto \text{sinc}\left[\frac{(\widetilde{\theta}_{1\,x} - \widetilde{\theta}_{2\,x})^2 - 4\theta_0^2}{8\theta_0(\delta\theta)_L}\right] \approx$$
$$\text{sinc}\left[\frac{\widetilde{\theta}_{1\,x} - \widetilde{\theta}_{2\,x} - 2\theta_0}{2(\delta\theta)_L}\right] + \text{sinc}\left[\frac{\widetilde{\theta}_{1\,x} - \widetilde{\theta}_{2\,x} + 2\theta_0}{2(\delta\theta)_L}\right], \tag{4.12}$$

где

$$(\delta\theta)_L = \frac{\lambda_p}{\pi L}\frac{N_{\text{eff}}}{\theta_0} = \frac{\lambda_p}{2\pi L}\frac{\theta_0}{n_{\text{eff}}^{(o)} - n_p}. \tag{4.13}$$

В (4.12) sinc - функция с аргументом, квадратичным по $(\widetilde{\theta}_{1\,x} - \widetilde{\theta}_{2\,x})$ заменена суммой двух sinc-функций с аргументами, линейными по сумме и разности углов $\widetilde{\theta}_{1\,x} - \widetilde{\theta}_{2\,x} \pm 2\theta_0$. Это известное приближение [122], которое справедливо в случае достаточной степени неколлинеарности $\theta_0 \gg (\delta\theta)_L$ или при выполнении условия

$$n_{\text{eff}}^{(o)} - n_p \gg \frac{\lambda_p}{2\pi L} \sim 10^{-4}, \tag{4.14}$$

что естественно имеет место в реальном эксперименте. Для получения полной волновой функции необходимо умножить (4.12) на член E_p, характеризующий накачку и зависящий от углов:

$$E_p^{\text{angle}} \propto \exp\left[-\frac{\pi^2 w^2}{2\lambda_p^2}(\widetilde{\theta}_{1\,x} + \widetilde{\theta}_{2\,x})^2\right], \tag{4.15}$$

где w, как и ранее, размер перетяжки пучка накачки. Оба этих фактора определяют зависимость центральных значений углов $\widetilde{\theta}_{1\,x}$ и $\widetilde{\theta}_{2\,x}$: $\widetilde{\theta}_{1\,x} = \pm\theta_0$ и $\widetilde{\theta}_{2\,x} = \mp\theta_0$. Тем не менее, $\widetilde{\theta}_{1,2\,x}$ всё ещё не истинное направление распространения испущенных фотонов. В соответствии с (4.7), истинное направление распространения фотонов задаётся как: $\theta_{1\,x} = \theta_0/(1+\xi)$ и $\theta_{2\,x} = \theta_0/(1-\xi)$ или $\theta_{1\,x} = \theta_0/(1-\xi)$ и $\theta_{2\,x} = \theta_0/(1+\xi)$. Для (x,z) плоскости, выбранной произвольно, эти уравнения определяют два конуса распространения фотонов - внешний и внутренний, где

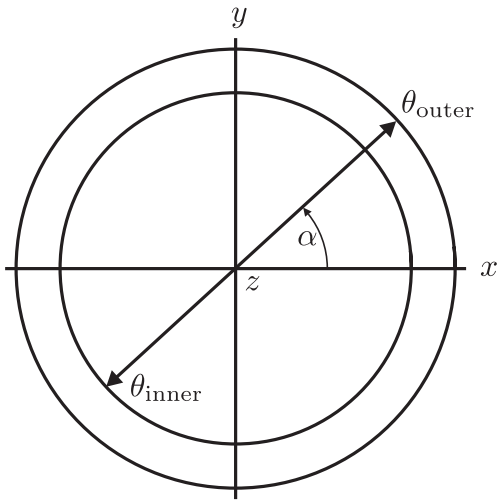

Рисунок 4.3 — Внутренний, внешний конусы и их угол раскрытия (равный половине угла раствора конуса) (4.16). Стрелки указывают положения фотонов в выбранной паре. Азимутальный угол α принимает значения от 0 до 2π.

оси конусов совпадают с направлением распространения Oz, а углы раскрытия конусов равны:

$$\theta_{\text{outer}} \equiv \theta_- = \frac{\theta_0}{1-\xi}\,, \;\; \theta_{\text{inner}} \equiv \theta_+ = \frac{\theta_0}{1+\xi}. \tag{4.16}$$

Во всех случаях низкочастотные фотоны распространяются вдоль внешнего конуса, а высокочастотные вдоль внутреннего. В каждой паре фотонов их направления распространения принадлежат противоположным диаметрам сечения конуса плоскостью, перпендикулярной оси z (рисунок 4.3). Несмотря на то, что функция $\theta_0 \equiv \theta_0(\xi,\varphi_0)$ сама по себе не является реальным углом раскрытия конусов распространения фотонов, она может служить в качестве параметра, характеризующего степень неколлинеарности, аналогично тому как ξ (4.2) служит характеристикой невырожденности. Тогда выражение (4.11) (вместе с выражениями (4.5) и (4.9)) может рассматриваться в качестве уравнения, устанавливающего связь между степенями неколлинеарности и невырожденности. На графике 4.4 построены зависимости углов θ_0, θ_+ и θ_- от параметра невырожденности ξ для различных значений угла φ_0 между оптической осью кристалла и направлением распространения накачки Oz.

Таким образом, для любых заданных ξ и φ_0, фотоны в паре имеют следующие центральные частоты и углы раскрытия конусов: $(\omega_h,\theta_{\text{ inner}})$ и $(\omega_l,\theta_{\text{ outer}})$. Для значений φ_0 не близких к $\varphi_{0\,\text{min}} = 0.37734$ (см. (4.2)) оба угла

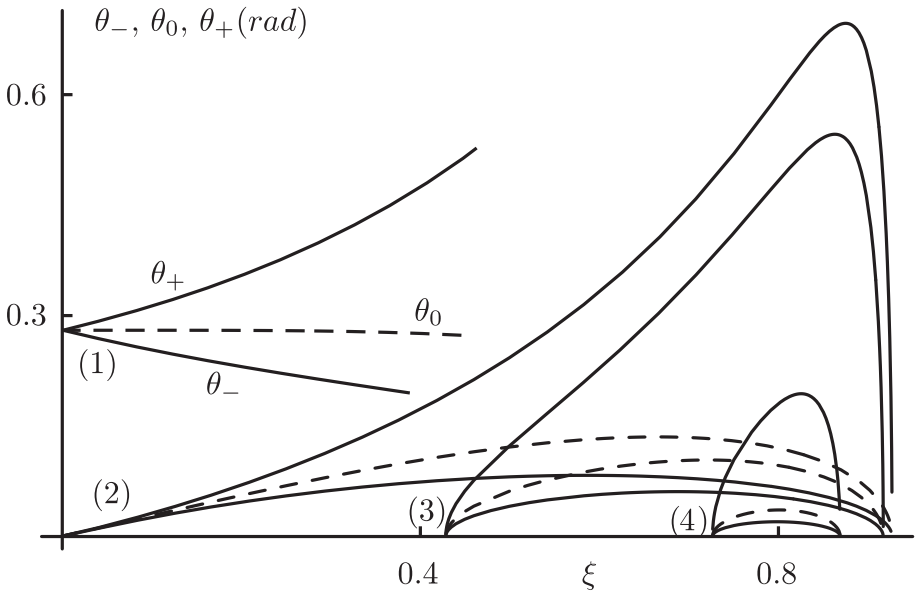

Рисунок 4.4 — Функции $\theta_-(\xi)$, $\theta_+(\xi)$ и $\theta_0(\xi)$ (пунктирные линии) для значений $\varphi_0 = 0.7\,(1), 0.5007589\,(2), 0.46\,(3)$ и $0.39\,(4)$.

раскрытия конусов $\theta_\pm(\xi)$ и центральные частоты испущенных фотонов $\omega_{h,l}(\xi)$ изменяются непрерывно с изменением параметра невырожденности ξ в широких диапазонах. Это означает, что в общем случае фотоны находятся в модах с различными частотами и направлениями, напоминая радугу. Тем не менее, так как центральные частоты испущенных фотонов зависят от ξ, можно выбрать пару фотонов с определённым параметром невырожденности с помощью установленных спектральных фильтров с пропускающими частотами около $\omega_h = \omega_0\frac{1+\xi}{2}$ и $\omega_l = \omega_0 - \omega_h = \omega_0\frac{1-\xi}{2}$. Эти фильтры позволят автоматически зафиксировать моды фотонов, распространяющиеся вдоль двух конусов с углами раскрытия $\theta_{\text{inner}}(\xi)$ и $\theta_{\text{outer}}(\xi)$ (4.16) и с $\xi = \frac{1}{2}(\omega_h - \omega_l)$. Другой способ получить тот же результат – провести угловую селекцию фотонов. Для обоих углов раскрытия конусов θ_- и θ_+, разница между которыми зависит от параметра невырожденности, угловая селекция реализуется с помощью щелей. Пример установки щелей представлен схематично на рисунке (4.5), где угол между оптической осью и осью Oz выбран равным $\varphi_0 = 0.5007589$. В данном примере при $\xi = 0$ рассматривается коллинеарный режим СПРС и не коллинеарный при $\xi > 0$. Расстановка щелей выбрана так, что параметр невырожденности получается равным $\xi_0 = 0.2$. Рисунок (4.5(b)) представляет собой ту же самую схему измерений с четырьмя щелям, где изображены наблюдаемые конусы. Заметим, что селекция фотонов может быть осуществлена не только при помощи щелей, но также и при помощи других оптических приспособлений, например опти-

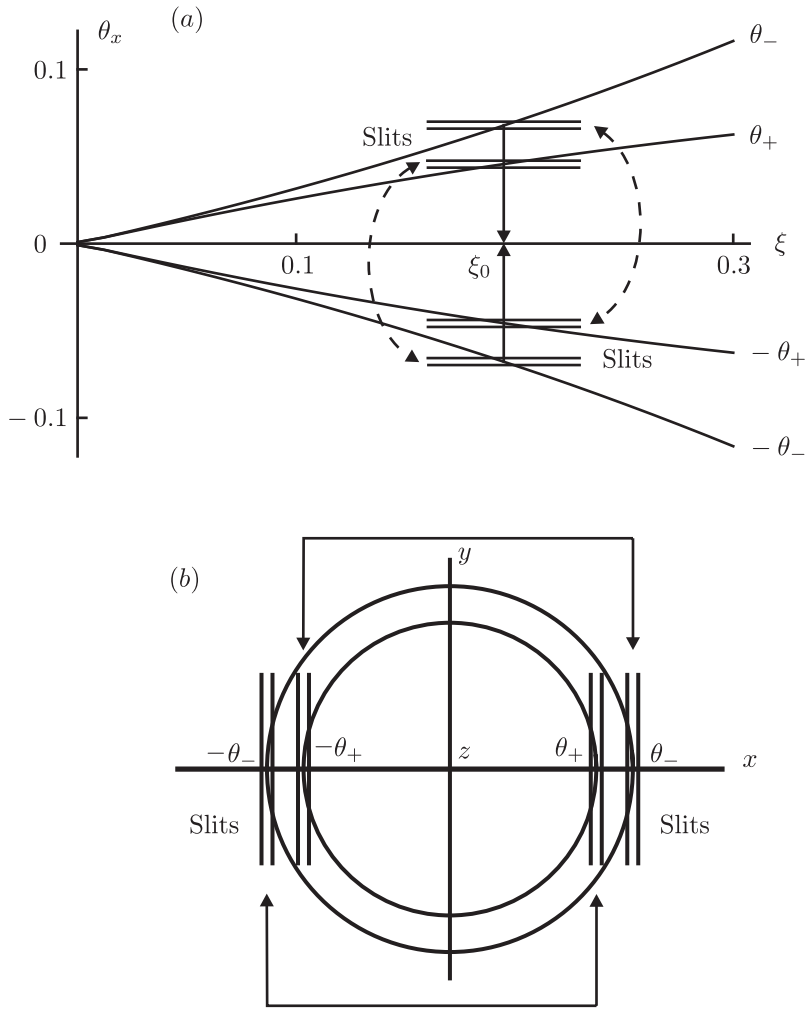

Рисунок 4.5 — (a) Углы раскрытия конусов для $\varphi_0 = 0.5007589$ и позиций щелей, дающих параметр невырожденности $\xi_0 = 0.2$. Пунктирные линии со стрелками обозначают пары щелей, через которые распространяются фотоны всех заданных пар.(b) То же самое в случае наблюдаемых конусов. Сопряженные щели для отобранных пар фотонов отмечены скобкой со стрелками.

ческих волокон, установленных в определённых местах, делителей пучков и т.д.

Ранее в данном подразделе предполагалось, что частоты фотонов задаются в точности ω_h или ω_l. На практике же частоты не являются строго фиксированными. Тем не менее, можно найти линейную поправку по отношению к центральным частотам:

$$\Delta_1^{(\mathrm{freq})} = (k_p - k_1 - k_2)^{(1)} = \frac{A_p(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0) - A_h(\omega_1 - \omega_h) - A_l(\omega_2 - \omega_l)}{c}, \tag{4.17}$$

где параметры A_h и A_p задаются следующим образом:

$$A_h = c\frac{dk_1}{d\omega_1}\Big|_{\omega_1=\omega_h} = \frac{c}{\mathrm{v}_{gr}^{(p)}}, A_l = c\frac{dk_2}{d\omega_2}\Big|_{\omega_2=\omega_l} = \frac{c}{\mathrm{v}_{gr}^{(l)}}$$
$$A_p = c\frac{dk_p}{d\omega_p}\Big|_{\omega_p=\omega_0} = \frac{c}{\mathrm{v}_{gr}^{(p)}}. \tag{4.18}$$

В данных выражениях $\mathrm{v}_{gr}^{(p)}$, $\mathrm{v}_{gr}^{(h)}$ и $\mathrm{v}_{gr}^{(p)}$ – групповые скорости накачки высокочастотного и низкочастотного фотонов в внутри кристалла. Частотный вклад в отстройку фазы (4.17) записывается в виде:

$$\Delta_1^{(\mathrm{freq})} = A_+(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0) - A_-(\omega_1 - \omega_2 - \xi\omega_0), \tag{4.19}$$

где обозначено

$$A_+ = A_p - \frac{A_h + A_l}{2}\ , \quad A_- = \frac{A_h - A_l}{2}. \tag{4.20}$$

Данное приближение становится недостаточным, если $\xi \to 0$, т.е. в частотно-вырожденном режиме СПРС. В данном режиме оба испущенных фотона становятся идентичными, и их групповые скорости совпадают, а A_- в (4.19, 4.20) становится равным нулю. Это означает, что в частотно-вырожденном режиме $\Delta_1^{(\mathrm{freq})}$ зависимость от $\omega_1 - \omega_2$ исчезает. Требуется рассмотреть дисперсию, т.е. более малые поправки второго порядка по отстройке, зависящей от частоты. Подобная процедура была проделана в статьях [123; 124]. Однако в настоящей работе подразумевается, что центральные частоты и групповые скорости обоих испущенных фотонов отличны друг от друга, в силу чего зависимость отстройки от разности частот присутствует уже в первом порядке и малые поправки второго порядка не требуются. Функции $A_+(\xi;\varphi_0)$ и $A_-(\xi)$ представлены на рисунке (4.6). Из данного рисунка следует, что функция $A_-(\xi)$ обращается в нуль не только при $\xi = 0$, но и в точке $\xi = 0.8142$. Как отмечалось ранее, данная точка является особенной, так как в ней зависимость $n_{\mathrm{eff}}(\xi)$ достигает максимума (Рис. 4.1), а $\varphi_0^{\mathrm{Coll}}(\xi)$ (Рис. 4.2) достигает минимума.

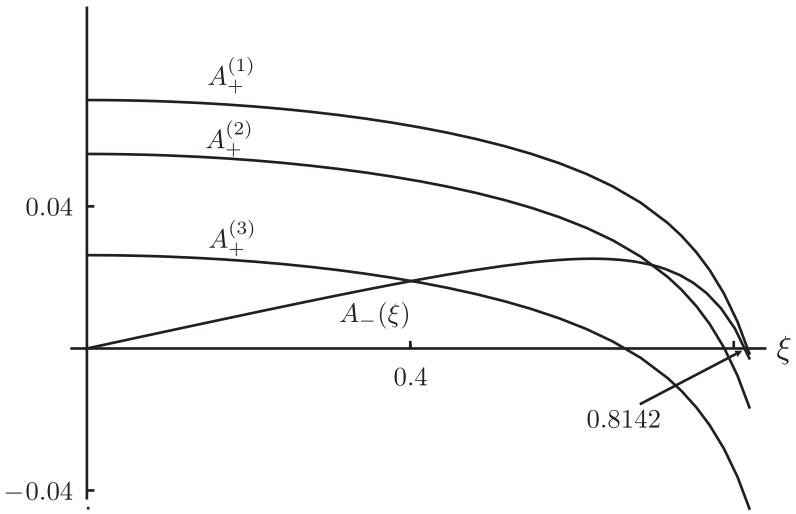

Рисунок 4.6 — Функции $A_-(\xi)$ и $A_+(\varphi_0,\xi)$, где для $A_+(\varphi_0,\xi)$ выбраны следующие значения $\varphi_0 = 0.37734\,(1), 0.500578\,(2)$ и $0.7\,(3)$.

Резюмируя, с учётом всех ранее приведенных выкладок и рассуждений, получаем волновую функцию в зависимости от угловых и частотных координат

$$\Psi \propto \exp\left[-\frac{(\omega_1+\omega_2-\omega_0)^2\tau^2}{2}\right]\times$$
$$\exp\left[-\frac{(\widetilde{\theta}_{1\,x}+\widetilde{\theta}_{2\,x})^2 w^2\pi^2}{2\lambda_p^2}\right]\mathrm{sinc}\Bigg\{\frac{\widetilde{\theta}_{1\,x}-\widetilde{\theta}_{2\,x}-2\theta_0}{(\delta\theta)_L}+$$
$$\frac{L}{2c}\Big[A_+(\omega_1+\omega_2-\omega_0)-A_-(\omega_1-\omega_2-\xi\omega_0)\Big]\Bigg\}\times$$
$$F_{sl}(\theta_{1\,x}-\theta_+)F_{sl}(\theta_{2\,x}+\theta_-)$$
$$+\Big(1\leftrightarrows 2\Big), \tag{4.21}$$

где τ – длительности ЭМИ накачки, F_{sl} – функции, задающие пространственный форм-фактор щелей. Символ $\Big(1 \leftrightarrows 2\Big)$ ответственен за симметризацию (4.21), которая осуществляется с помощью перестановки индексов угловых и частотных переменных $\theta_{1,2\,x} \to \theta_{2,1\,x}$ и $\omega_{1,2} \to \omega_{2,1}$. Волновая функция в выражении (4.21) соответствует измерениям в заданной плоскости (x,z). Случай, когда открыты только две из четырёх щелей представлены на рисунке (4.7). Предположим, что ширина щелей $(\delta\theta)_{sl}$ меньше чем $(\delta\theta)_L$. При этом условии $(\delta\theta)_{sl}/(\delta\theta)_L \ll 1$ и угловыми переменными в аргументе sinc можно пренебречь. Более того, если не требуется подробный анализ узких угловых распределений фотонов после прохождения щелей, можно указать только

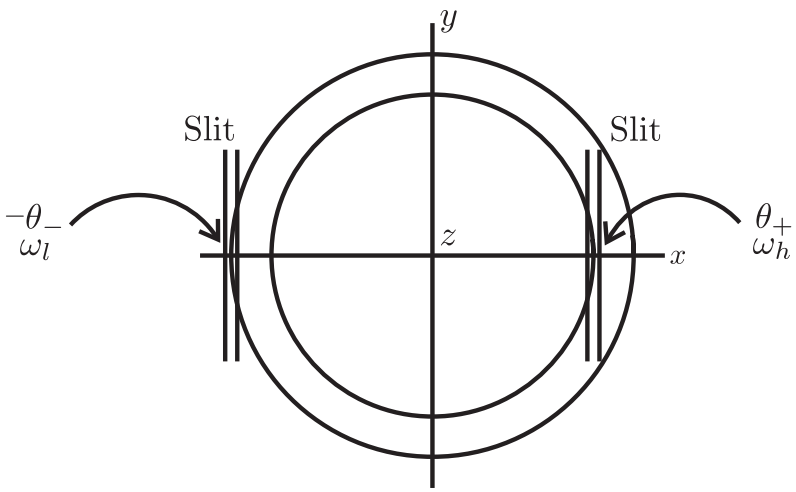

Рисунок 4.7 — Схема измерений с двумя щелями в плоскости (x,z).

направления распространения фотонов под положительным или отрицательным углом. Математически это означает, что произведение форм-факторов щелей $F_{sl}(\theta_{1\,x} - \theta_+)F_{sl}(\theta_{2\,x} + \theta_-)$ можно заменить на произведение двух столбцов $\binom{1}{0}_1 \binom{0}{1}_2$, соответствующим $\theta_x > 0$ и $\theta_x < 0$ соответственно. Подобная замена значительно упрощает вид результирующей волновой функции. Дальнейшее упрощение возможно с помощью подбора параметров накачки. Пусть выполнено приближение длинных импульсов накачки $\tau \gg \tau_{gr}$, где $\tau_{gr} = L|A_+|/2c$ – характерное время, связанное с разницей групповых скоростей накачки и испущенных фотонов. Положив $A_+ \sim 0.3$ (см. (4.17), (4.18), (4.20) и (4.21)), что соответствует $\tau_{gr} \sim 0.1\,\mathrm{ps}$. Следовательно, импульсы накачки можно рассматривать как длинные в пикосекундных и более длительных диапазонах. Импульсы накачки считаются короткими для фемтосекундных значений длительности. Случай длинных импульсов накачки $\tau_{gr}/\tau \ll 1$ соответствует малым значениям $\propto A_+\nu_+$ в аргументе sinc - функции в выражении (4.21). В результате, упрощённый вид волновой функция принимает вид:

$$\Psi(\omega_1,\omega_2) = \Phi(\omega_1,\omega_2) \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 + \Phi(\omega_2,\omega_1) \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2, \tag{4.22}$$

где

$$\Phi(\omega_1,\omega_2;\xi) \propto \exp\left[-\frac{(\omega_1+\omega_2-\omega_0)^2\tau^2}{2}\right]\times$$
$$\operatorname{sinc}\left[\frac{LA_-}{2c}(\omega_1-\omega_2-\xi\omega_0)\right]\, e^{i\omega_1\Delta t}, \tag{4.23}$$

где Δt обозначает задержку во времени фотонов, распространяющихся в области с положительными θ_x. Эта временная задержка введена для анализа эффекта ХОМ, который будет рассмотрен далее.

Двухчастотная волновая функция в (4.22), (4.23) может быть использована для нахождения временного представления волновой функции $\widetilde{\Psi}(t_1,t_2)$, определяемой как Фурье–образ $\Psi(\omega_1,\omega_2)$:

$$\widetilde{\Psi}(t_1,t_2) = \int d\omega_1 d\omega_2 \Psi(\omega_1,\omega_2) e^{i(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)}, \tag{4.24}$$

где t_1 и t_2 могут быть интерпретированы как времена попадания испущенных фотонов на детектор или делитель пучка. Интегралам в (4.24) можно придать аналитическую форму, если моделировать $\operatorname{sinc}(x)$ с помощью Гаусс-функции $e^{-\alpha x^2}$, где параметр $\alpha = 0.19292$ определяется через условие равенства ширины на половине высоты обеих функций $\operatorname{sinc}(x)$ и $e^{-\alpha x^2}$. Результат интегрирования представим в виде:

$$\widetilde{\Psi}(t_1,t_2) = N\left\{F(t_1,t_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 + \right.$$
$$\left. F(t_2,t_1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right\}, \tag{4.25}$$

где N – нормировочная константа. Функция $F(t_1,t_2)$ задана в следующем виде:

$$F^{2\,\mathrm{slits}}(t_1,t_2) = \exp\left[\frac{i\xi\omega_0}{2}(t_1-t_2+\Delta t)\right]\times$$
$$\exp\left[-\frac{(t_1+t_2+\Delta t)^2}{8\tau^2} - \frac{(t_1-t_2+\Delta t)^2}{4\alpha L^2 A_-^2/c^2}\right]. \tag{4.26}$$

Нормировка волновой функции $\widetilde{\Psi}(t_1,t_2)$ определяется условием $\int dt_1 dt_2 \widetilde{\Psi}(t_1,t_2)^\dagger \widetilde{\Psi}(t_1,t_2) = 1$, что даёт:

$$N = \left(2\int dt_1 dt_2 |F(t_1,t_2)|^2\right)^{-1/2}. \tag{4.27}$$

Зная волновую функцию фотонов с $\theta_x > 0$ и $\theta_x < 0$, отобранных с помощью щелей, рассмотрим эффект ХОМ. Фотоны посылаются на 50-50 % делитель пучка под углами 45° с противоположных сторон. Делитель пучка преобразует волновую функцию, действуя на столбцы в (4.25) следующим образом:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right] + \\ +\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right]\end{aligned} \tag{4.28}$$

и также

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right] - \\ -\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right]\end{aligned} \tag{4.29}$$

. Первые члены после символа “ $\Rightarrow$ ” в (4.28) и (4.29) соответствуют неразделённым СПРС парам, в которых оба фотона распространяются в одном направлении после делителя пучка. Вторая часть соответствует разделённым парам, в которых один фотон распространяется в одном направлении, а второй - в ортогональном (см. рис. (4.8)). Вероятности получить неразделённые

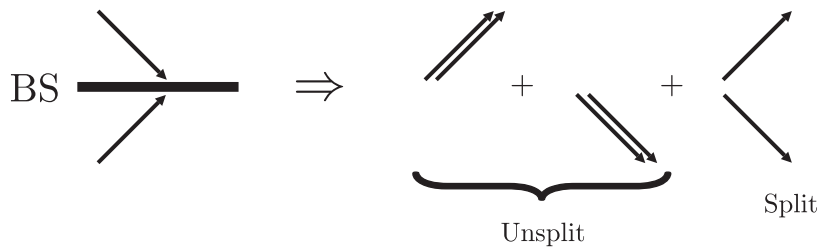

Рисунок 4.8 — Возможные альтернативы разделения пары фотонов на делителе пучка. Unsplit - соответствует отсутствию разделения, оба фотона после делителя пучка распространяются в одинаковом направлении. Split - соответствует разделению фотонов, такое разделение не даёт вклада в идеальном ХОМ эффекте в результате квантовой интерференции

и разделённые пары фотонов после делителя пучка могут быть измерены экспериментально с помощью детекторов, которые считают число пришедших фотонов в каждом канале независимо, либо для обоих каналов по схеме совпадений. В идеальном ХОМ-эффекте сигнал совпадения и вероятность расщепления становятся нулевыми из-за квантовой интерференции. Это происходит, если падающие фотоны имеют одинаковые характеристики (поляризация и частота) и одновременное попадают на делитель пучка. Любые отклонения от этих условий разрушают идеальный ХОМ-эффект и порождают ненулевую вероятность расщепления. Другими словами, в результирующем состоянии появляются фотоны в разделённых модах, соответствующих разным каналами. Это разделение наблюдается с помощью измерений по схеме совпадений. В случае неколлинеарного и невырожденного СПРС, обе частоты фотонов и время их попадания на делитель пучка не являются строго заданными и имеют неопределённость. По этой причине анализ модификаций эффекта ХОМ для такого случая интересен и может дать нетривиальные результаты.

В соответствии с видом временной зависимости волновой функции после делителя пучка (4.25), амплитуды вероятности этих процессов задаются выражением:

$$A_{\text{unsplit, split}}(t_1,t_2) = \frac{N}{\sqrt{2}}\Big[F(t_1,t_2) \pm F(t_2,t_1)\Big]. \tag{4.30}$$

Квадрат абсолютных значений этих амплитуд определяет разностную плотность вероятностей фотонов попасть вместе в один из каналов или разделиться:

$$\frac{dw_{\text{unsplit, split}}}{dt_1 dt_2} = |A_{\text{unsplit, split}}(t_1,t_2)|^2, \tag{4.31}$$

Полные вероятности задаются при помощи интегрирования выражения (4.31) по временам попадания фотонов на делитель:

$$w_{\text{unsplit,split}} = \int dt_1 dt_2 \frac{dw_{\text{unsplit,split}}}{dt_1 dt_2}. \tag{4.32}$$

После интегрирования, получаем конечный результат для схемы с двумя щелями, представленный на рисунке (4.7):

$$w^{2\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{unsplit,split}}(\Delta t) = \frac{1}{2}\left\{1 \pm \exp\left[-\frac{\xi^2\omega_0^2\alpha L^2 A_-^2}{2c^2}\right] \times \right.$$
$$\left. \exp\left[-\frac{\Delta t^2}{2\alpha L^2 A_-^2/c^2}\right]\right\}. \tag{4.33}$$

Зависимость вероятностей разделения бифотонов после делителя пучка $w^{2\mathrm{slits}}_{\mathrm{split}}(\Delta t)$ представлена на рисунке (4.9) для различных степеней невырожденности ξ. Кривая (1) соответствует очень малой степени невырожденности

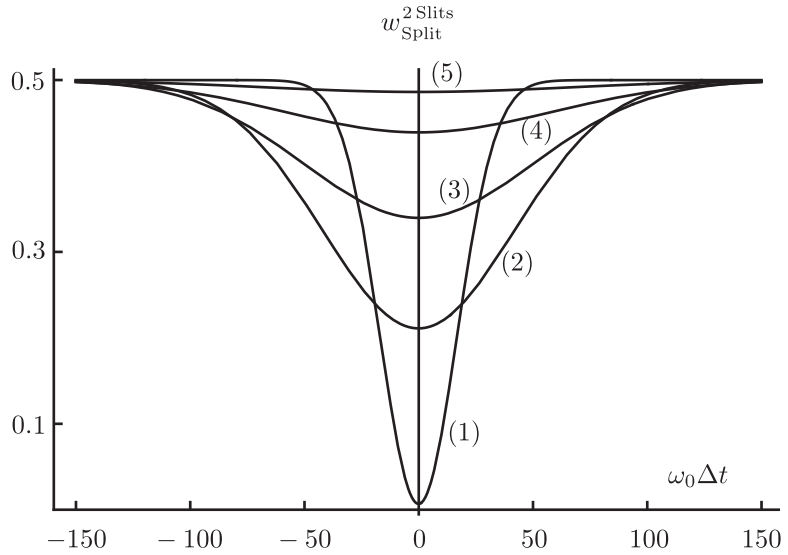

Рисунок 4.9 — Вероятность разделения бифотонов после делителя пучка в зависимости от времени задержки Δt в канале с $\theta_x > 0$ для различных параметров степени невырожденности $\xi = 0.01\,(1), 0.025\,(2), 0.03\,(4), 0.035\,(4)$ и $0.04\,(5)$.

$\xi = 0.01$ и описывает нормальный ХОМ-эффект, где из-за квантовой интерференции вероятность получить разделённые фотоны после делителя пучка практически равна нулю для нулевого времени задержки. Для больших времён задержки вероятность возрастает до значения 0.5. Растущая степень невырожденности ξ быстро разрушает ХОМ эффект в схеме измерений с двумя щелями, что видно по характерному уменьшению «провала» кривых $w^{2\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{Split}}(\Delta t)$. Для $\xi = 0.04$ кривая $w^{2\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{Split}}(\Delta t)$ становится почти плоской и практически без провала при $\Delta t = 0$, что означает сильное подавление квантовой интерференции.

В схеме измерений с четырьмя щелями (см. рисунок 4.5) ситуация совершенно другая. Математически добавление второй пары щелей, соответствующих одному и тому же параметру невырожденности ξ, означает следующее. Если для одной пары щелей волновая функция равна $\Psi(\xi)$, то для двух пар щелей она будет равна $\Psi(\xi)+\Psi(-\xi)$. Применяя это правило к волновой функции в (4.25) и (4.26), легко найти, что волновая функция (4.25) не меняется, но в выражении (4.26) для функции $F(t_1,t_2)$ - экспоненциальный фактор $\exp\left[\frac{i\xi\omega_0}{2}(t_1-t_2+\Delta t)\right]$ заменяется на $\cos\left[\frac{\xi\omega_0}{2}(t_1-t_2+\Delta t)\right]$:

$$F^{4\,\mathrm{slits}}(t_1,t_2)=\cos\left[\frac{\xi\omega_0}{2}(t_1-t_2+\Delta t)\right]\times \\ \exp\left[-\frac{(t_1+t_2+\Delta t)^2}{8\tau^2}-\frac{(t_1-t_2+\Delta t)^2}{4\alpha L^2A_-^2/c^2}\right]. \tag{4.34}$$

Это «небольшое» изменение значительно модифицирует финальные результаты, хотя общая процедура вычислений описанная выше остается неизменной. После интегрирования получаем:

$$w^{4\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{unsplit,split}}(\Delta t)=\frac{1}{2}\left\{1\pm\exp\left[-\frac{\Delta t^2}{2\alpha L^2A_-^2/c^2}\right]\times \right. \\ \left. \frac{\cos(\xi\omega_0\Delta t)+\exp\left(-\xi^2\omega_0^2\alpha L^2A_-^2/2c^2\right)}{1+\exp\left(-\xi^2\omega_0^2\alpha L^2A_-^2/2c^2\right)}\right\} \tag{4.35}$$

При правильной нормировке $w^{4\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{unsplit}}+w^{4\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{split}}=1$. В эксперименте для нахождения этих вероятностей необходимо измерить число разделённых N_{split} и неразделённых N_{unsplit} пар . В таком случае вероятности $w_{\mathrm{unsplit,split}}$ определяются через

$$w_{\substack{\mathrm{split}\\ \mathrm{unsplit}}}=\frac{N_{\substack{\mathrm{split}\\ \mathrm{unsplit}}}}{N_{\mathrm{split}}+N_{\mathrm{unsplit}}}. \tag{4.36}$$

Наиболее информативные кривые зависимости $w^{4\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{split}}(\Delta t)$ (4.35) представлены на рисунках (4.10) и (4.12). Кривая (a) на рисунке (4.10) построена при одном и том же значении параметра невырожденности $\xi=0.04$, при котором в схеме измерений с двумя щелями ХОМ эффект исчезает (см. рисунок (4.9), кривая (5)). Разница между этими двумя кривыми демонстрирует, что добавление фотонов из второй пары щелей возвращает способность к квантовой интерференции рассматриваемого состояния бифотона. Большой провал при $\Delta t=0$ присутствует

при $\xi = 0.04$ и при бóльших степенях невырожденности. Для всех параметров ξ и для всех кривых на рисунке (4.10) $w_{\text{split}}^{4\,\text{slits}}(\Delta t = 0) = 0$. Новым эффектом, отличающим схему с четырьмя щелями от схемы с двумя щелями, является появление осцилляций в зависимостях $w_{\text{split}}^{4\,\text{slits}}(\Delta t)$ при $\xi \geq 0.04$ и формирование гребнеобразных структур. Если кривую (a) на рис. (4.10) при $\xi = 0.04$ можно рассматривать только как указание на возможное существование режима осцилляций, то кривая (b) демонстрирует, что уже при $\xi = 0.1$ осцилляции довольно хорошо выражены. С ростом параметра невырожденности ξ частота осцилляций растёт вместе с занимаемой ими областью. Кривая (c) – наглядный пример режима с очень большим числом осцилляций, возникающих при $\xi = 0.6$. Стоит обратить внимание на то, что кривые (b) и (c) на рис.(4.10) в некоторой степени напоминают кривые на рис. 4 работы [125], хотя есть большие различия в формулировках и в смысле кривых. В настоящей работе, приведённые выше рисунки (4.10) характеризуют вероятность наблюдения расщеплённых бифотонных пар после делителя пучка, просуммированных по обоим временам попаданий фотонов t_1 и t_2. Эта картина имеет место только в случае схемы измерений с четырьмя щелями в рамках традиционной схемы ХОМ с одним делителем пучка и модулем временной задержки в одном из каналов. В настоящем описании параметры временной волновой функции и вероятностей $w_{\text{unsplit,split}}^{4\,\text{slits}}$ связаны со степенью неколлинеарности СПРС и выражены в терминах функции $A_{\min}(\xi)$, определяемой разностью групповых скоростей фотонов в кристалле. В работе [125] авторы рассматривают двухчастотную волновую функцию в схеме с двойным модулем задержки и более чем одним делителем пучка и, как следствие, большим числом каналов. Кроме того, кривые на рис.4 [125] характеризуют ожидаемое совпадение сигналов между фотонами от разных делителей пучка. Тем не менее, имеет место сходство результатов настоящей работы с результатами работы [125], несмотря на принципиальные различия указанные выше. Это сходство довольно интересно. Сходство подчеркивает универсальность явления квантовой интерференции, которое проявляется себя аналогичным образом, но в различных условиях. В некоторой степени схема с двойной задержкой и с двумя щелями имитирует ситуацию, возникающую в схеме с четырьмя щелями.
Фактически, число периодов хорошо выраженных осцилляций у кривых на рис.

(4.10) определяется соотношением между периодами:

$$T_{\text{osc}} = \frac{2\pi}{\omega_h - \omega_l} = \frac{2\pi}{\xi\omega_0} \tag{4.37}$$

Обозначим как $T_{1/2}$ время, за которое вероятность $w^{4\,\text{slits}}_{\text{split}}(\Delta t)$ достигает регионов $w^{4\,\text{slits}}_{\text{split}} \approx 1/2$. $T_{1/2}$ определятся экспонентой справа в выражении (4.35):

$$T_{1/2} = T_{\text{decoh}} = \sqrt{2\alpha}\frac{LA_{\min}(\xi)}{c} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{L}{v_{gr}^{(h)}} - \frac{L}{v_{gr}^{(l)}}\right). \tag{4.38}$$

Время $T_{1/2} - T_{\text{decoh}}$ порядка разницы между временами требуемыми высокочастотным и низко-частотным фотонам пройти расстояние от начала до конца кристалла. Это время можно трактовать как время декогеренции, так как при $\Delta t > T_{1/2}$ обе вероятности $w^{4\,\text{slits}}_{\text{split}}(\Delta t)$ и $w^{4\,\text{slits}}_{\text{unsplit}}(\Delta t)$ становятся равными $1/2$. Это случай, когда оба фотона, образующие бифотон, ведут себя как независимые частицы и, следовательно, не проявляют эффектов квантовой интерференции. Возвращаясь к режимам осцилляций эффекта ХОМ, видно, что число наблюдаемых осцилляций определяется отношением длительности осцилляции для конкретного режима к периоду $T_{1/2}/T_{\text{osc}}$. Данные временные параметры изображены на рисунке (4.11) (в единицах ω_0^{-1}) как функции параметра невырожденности ξ. Очевидно, что не существует осцилляций в области с малыми значениями ξ, так как в этом случае $T_{\text{osc}} \gg T_{1/2}$. Осцилляции начинают появляться при $T_{\text{osc}} \sim T_{1/2}$, что соответствует кривой (a) на рисунке (4.10). При $\xi \geq 0.1$) соотношение $T_{1/2}/T_{\text{osc}}$ и число наблюдаемых осцилляций велико и увеличивается с ростом ξ.

Тем не менее, возникает интересный эффект при стремлении ξ к значению $\xi_0 = 0.8142$, где функция $A_{\min}(\xi)$ обращается в нуль (см. рисунок 4.6). При стремлении к данной точке время декогеренции $T_{1/2}$ становится очень мало и сравнимо с периодом осцилляций T_{osc}. На (4.11(b)) построены времена $T_{1/2}$ и T_{osc} как функции ξ в малой окрестности точки $\xi = 0.8142$, что демонстрирует вышесказанное. Поведение вероятности $w^{4\,\text{slits}}_{\text{split}}(\Delta t)$ в этой области проиллюстрировано на рисунке (4.12) и выглядит очень схожим с первыми двумя кривыми на рисунке (4.10).

Несмотря на сходство, имеет место достаточно заметная разница в масштабировании кривых на рисунках (4.10) и (4.12). Например, если расстояние

между двумя пиками на рисунке (4.11(a)) $\delta(\omega_0\Delta t) = 140$, то на схожей кривой (4.12(b)) $\delta(\omega_0\Delta t) = 6.7$. Другими словами кривая на рисунке (4.12(b)) в 20 раз уже, чем кривая на рисунке (4.10(a)). Заметим, что осцилляции в зависимости от времени задержки Δt в сигналах по схеме совпадений были замечены экспериментально для режима СПРС с синхронизмом типа 2 [126]. Тем не менее, формирование временных «гребёнок» конечных размеров (4.10) и (4.12) ранее не наблюдались. В данном контексте главная качественная разница между синхронизмом типа 1 и типа 2 определяется групповыми скоростями испущенных фотонов. В случае типа 2 различие между обыкновенным и необыкновенным фотонами присутствует в частотно-вырожденном режиме, в котором $v_{\rm gr}^{(o)} \neq v_{\rm gr}^{(e)}$ и $\xi = 0$. Для случая синхронизма типа 1 разность групповых скоростей возникает только для невырожденного режима при $\xi \neq 0$.

Общие выражения (4.33) и (4.35) для вероятностей получения разделённых/-неразделённых пар фотонов после прохождения делителя пучка могут быть получены напрямую из двухчастотной волновой функции (4.22), (4.23) и через её вид в случае измерений с четырьмя щелями. Использованная ранее волновая функция обеспечивает дополнительную информацию о динамике эволюции состояния бифотонов. В частности волновая функция в зависимости от временных переменных в (4.24)-(4.26) может быть использована для описания дифференциальной плотности вероятности совпадения $dw^{(c)}/d(t_1 - t_2)$ в зависимости от разности времён прихода фотонов $t_1 - t_2$. Для схемы измерений с четырьмя щелями плотность вероятности $dw^{(c)}_{4\,\rm slits}/d(t_1 - t_2)$ определяется с помощью $F^{4\,\rm slits}(t_1,t_2)$ и $F^{4\,\rm slits}(t_2,t_1)$ (4.34):

$$\frac{dw^{(c)}_{4\,\rm slits}}{d(t_1 - t_2)} \propto \left| \cos\left[\frac{\xi\omega_0}{2}(t_1 - t_2 + \Delta t)\right] \exp\left[-\frac{(t_1 - t_2 + \Delta t)^2}{4\alpha L^2 A_-^2/c^2}\right] - \cos\left[\frac{\xi\omega_0}{2}(t_1 - t_2 - \Delta t)\right] \exp\left[-\frac{(t_1 - t_2 - \Delta t)^2}{4\alpha L^2 A_-^2/c^2}\right] \right|^2. \tag{4.39}$$

Зависимость $dw^{(c)}_{4\,\rm slits}/d(t_1 - t_2)$ от $t_1 - t_2$ представлена на двух рисунках (4.13) для двух различных значений времени задержки $\Delta t \neq 0$. Данные рисунки указывают на ярко выраженные осцилляции плотности вероятности совпадения.

Длительность отдельных узких пиков на этих кривых $\omega_0\delta t$ порядка $T_{\rm osc}$ (4.37). Ширины «гребёнок» на рисунке 4.13 соответствуют $t_1 - t_2 = \pm\Delta t$. Две «гребёнки» хорошо разделены если $\Delta t > T_{\rm decoh}$ и сливаются в одну «гребёнку» в случае $\Delta t < T_{\rm decoh}$. При $\Delta t = 0$ из выражения (4.39) следует, что $\frac{dw^{(c)}_{4\,\rm slits}}{d(t_1-t_2)} \equiv 0$. В случае схемы измерений с двумя щелями плотность вероятности совпадений $dw^{(c)}_{2\,\rm slits}/d(t_1-t_2)$ определяется с помощью интегрирования квадрата абсолютного значения $F^{2\,\rm slits}(t_1,t_2)-F^{2\,\rm slits}(t_2,t_1)$ и $F^{2\,\rm slits}(t_1,t_2)$ (4.26) по t_1+t_2. В результате получаем:

$$\frac{dw^{(c)}_{2\,\rm slits}}{d(t_1-t_2)} \propto 2\exp\left[-\frac{(t_1-t_2)^2+\Delta t^2}{2\alpha L^2 A_-^2/c^2}\right]\times \left\{\cosh\left[\frac{(t_1-t_2)\Delta t}{\alpha L^2 A_-^2/c^2}\right] - \cos\left[\xi\omega_0(t_1-t_2)\right]\right\}. \tag{4.40}$$

Зависимость $dw^{(c)}_{2\,\rm slits}/d(t_1-t_2)$ от t_1-t_2, определенная с помощью выражения (4.40) проиллюстрирована, на рисунке (4.14) для трёх различных групп параметров ξ и $\omega_0\Delta t$. Кривые указывают на появление большого числа осцилляций. Структура этих осцилляций определяется вкладами и соотношениями трех характерных параметров времени: времени декогеренции $T_{\rm decoh}$ (4.38), периодом осцилляций $T_{\rm osc}$ (4.37), и задержкой Δt. Режим с большим числом осцилляций, образующими одну «гребёнку» на рисунке (4.14(a)) сохраняет свою форму даже при $\Delta t = 0$, что отличает случай схемы измерений с двумя щелями от случая схемы измерений с четырьмя щелями $d^{4\,\rm slits}_{\rm split}/d(t_1-t_2)\big|_{\Delta t=0} \equiv 0$. Заметим, что кривые на рисунке (4.14) сильно похожи на кривые, полученные в работе [127], где рассматривались распределения по совпадениям для фотонов в зависимости от поперечных координат фотонов на выходе из кристалла: зависимости $dw^{(c)}/d(x_1-x_2)$ от x_1-x_2. Данная постановка существенно отличается от рассмотренной в настоящей работе и не имеет ничего общего с рассмотренным выше временным распределением. Тем не менее результаты очень схожи! Сходство результатов [127] и настоящей работы (4.14) обусловлено одной природой, заключающейся в когерентности состояния бифотонов. Сходство проявляется в различных схемах измерений, где явления квантовой интерференции приводят к наличию (или отсутствию) осцилляций. Отметим, что наблюдение данных осцилляций возможно в эксперименте с использованием детекторов с фемтосекундным временным разрешением. Хотя если временное разрешение детекто-

ров больше чем период осцилляций T_{osc}, но меньше чем времена задержки Δt и декогеренции T_{decoh} (4.38) то возможно наблюдать гладкие огибающие кривых на рисунке 4.13, описанные теоретически в работе [128].

Анализ, проведённый в данной главе, описывает результаты, которые раскрывают фундаментальные свойства состояний бифотонов. Данные свойства связаны с когерентностью состояний бифотонов, которая проявляется в структуре временной интерференции описанной выше, что также важно для точных квантоптических измерений. В частности, как отмечалось в Главе 3, измерение ЛИМ бифотонов существенно связано с параметрами СПРС. Таким образом, выбор режима играет важную роль, так как позволяет точно установить параметры СПРС и использовать их как основу для последующих измерений, связанных уже непосредственно с ЛИМ.

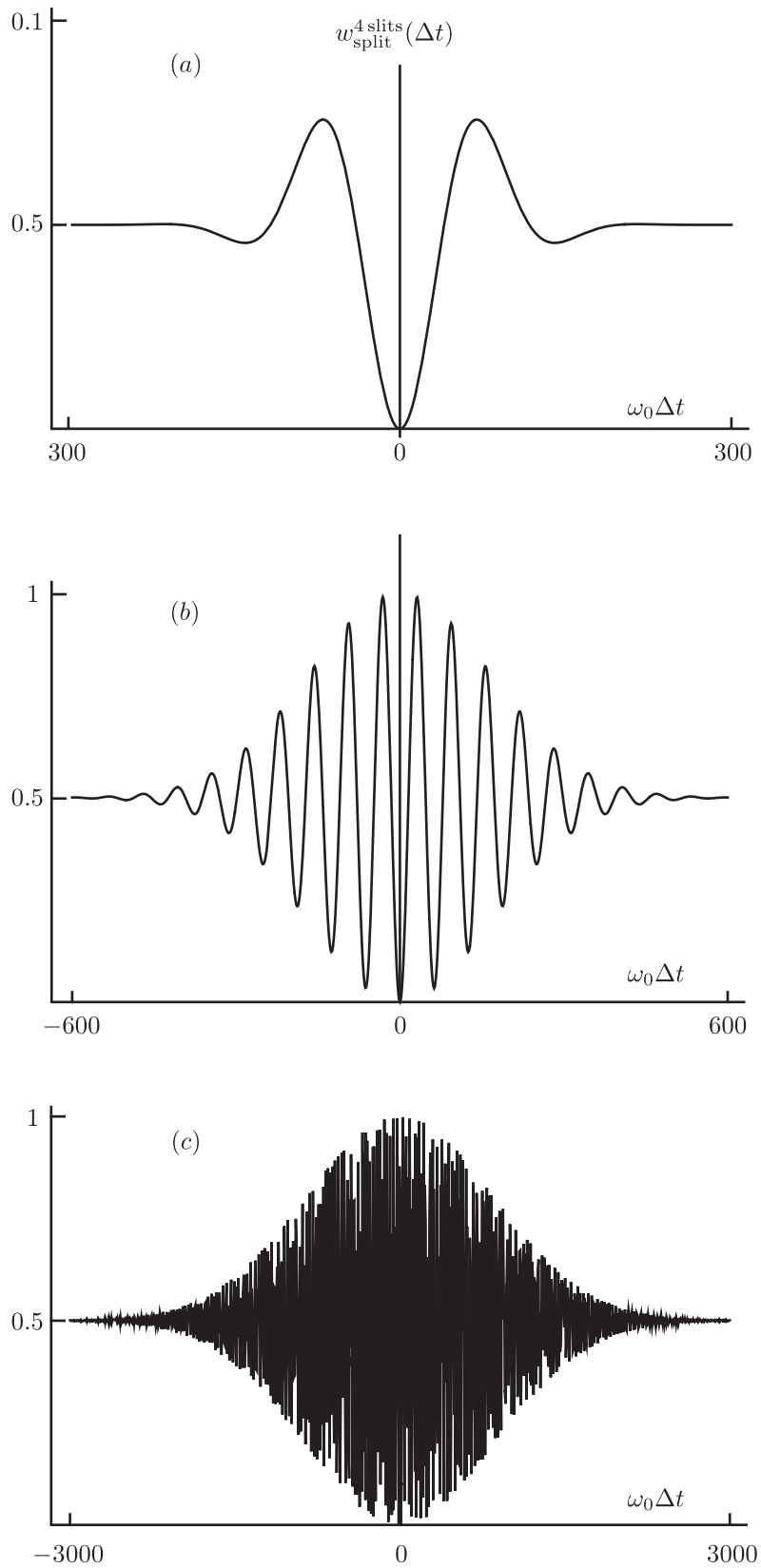

Рисунок 4.10 — Вероятность разделения бифотона после делителя пучка в схеме измерений с четырьмя щелями в зависимости от времени задержки Δt (в единицах $1/\omega_0$) для 5 значений параметра невырожденности $\xi : 0.04\,(a);\ 0.1\,(b); 0.6\,(c)$.

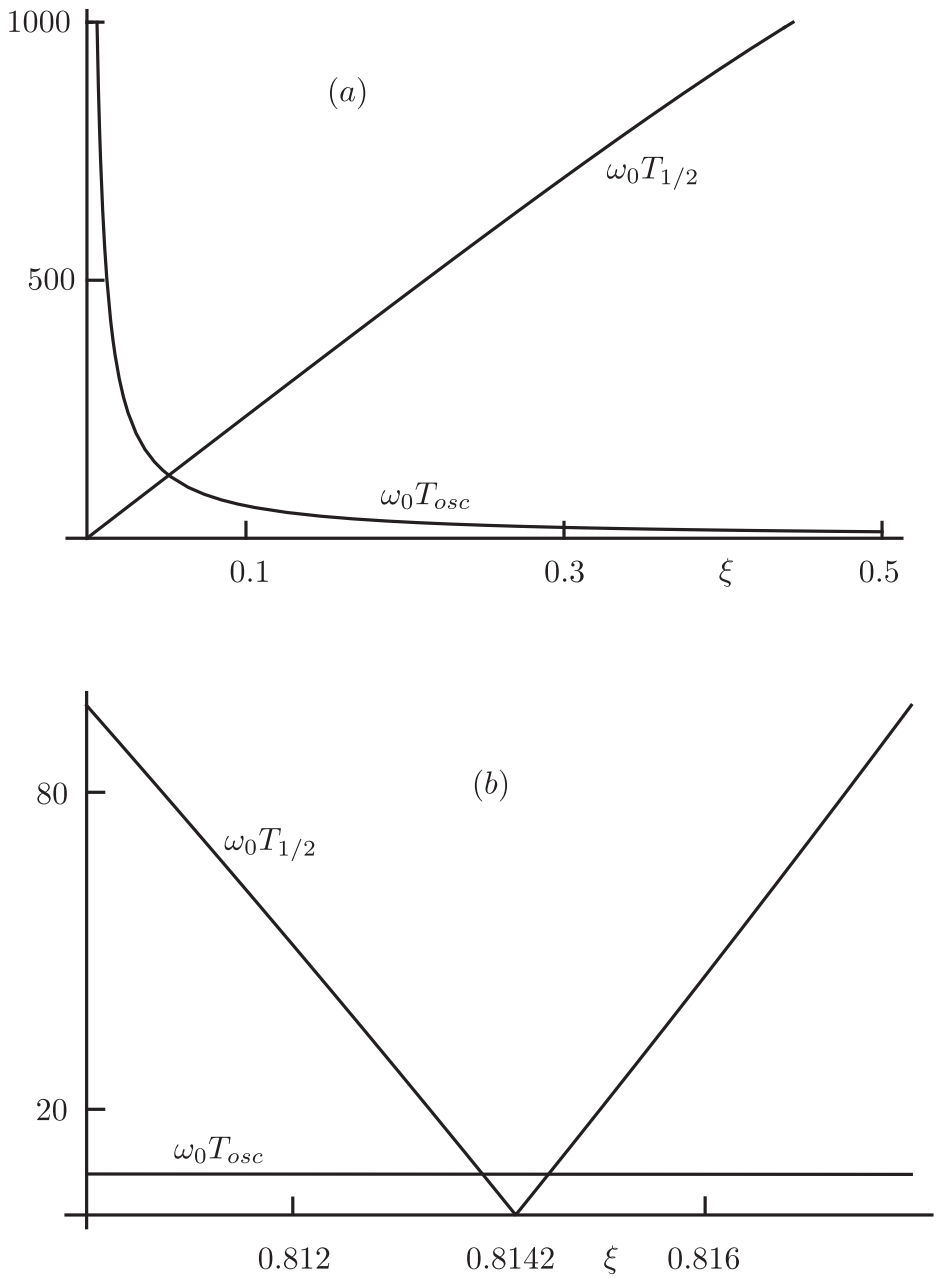

Рисунок 4.11 — Период осцилляций на кривых 4.10 (4.37) и время необходимое $w_{\text{split}}^{4\,\text{slits}}(\Delta t)$ достигнуть значения 1/2 (4.38), выраженное в единицах ω_0^{-1}; (a) - область малых и средних значений параметра ξ; (b) - малый регион около параметра невырожденности $\xi = 0.8142$.

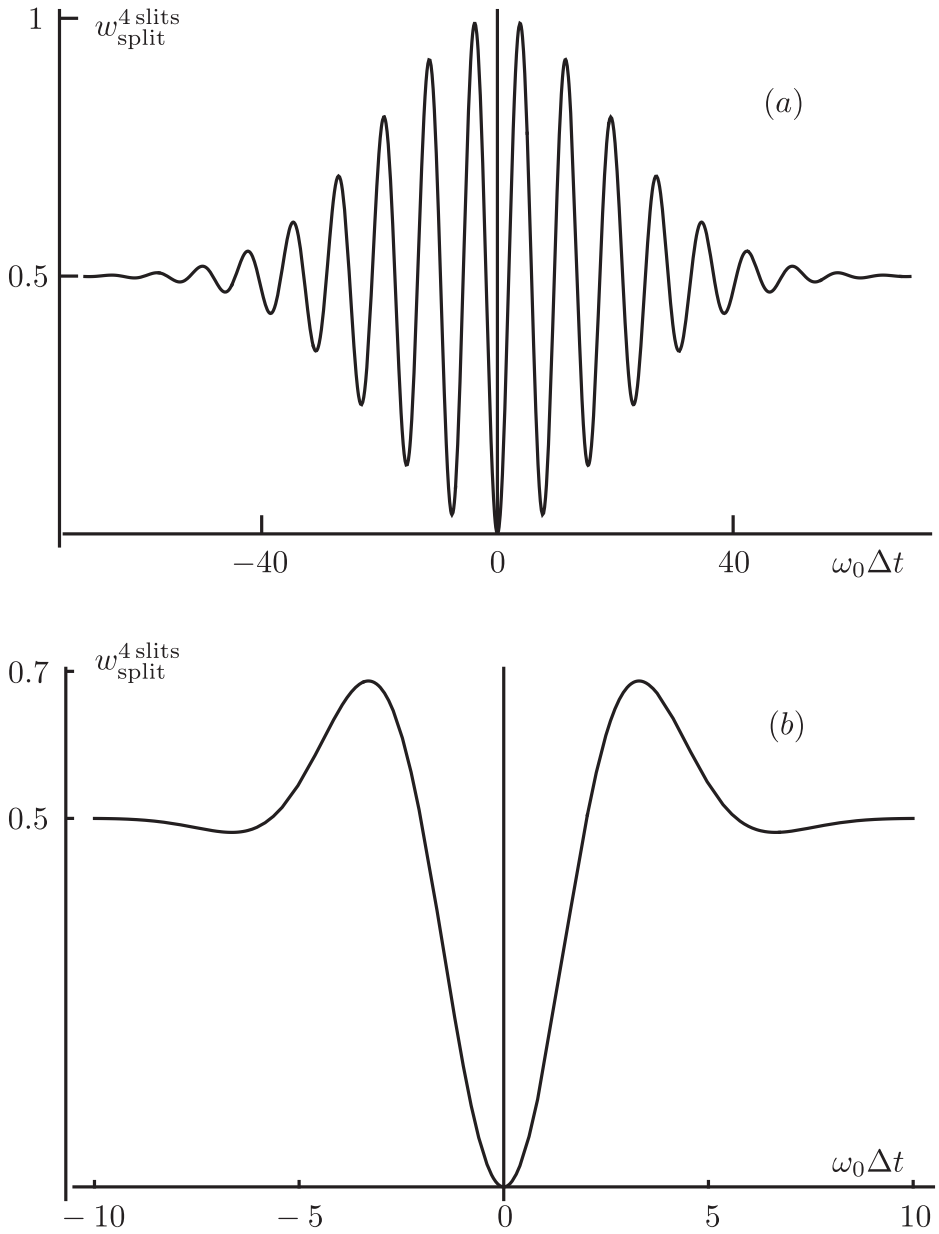

Рисунок 4.12 — Функция $w_{\text{split}}^{4\,\text{slits}}(\Delta t)$ (4.35) в зависимости от ξ в окрестности точки $\xi_0 = 0.8142$

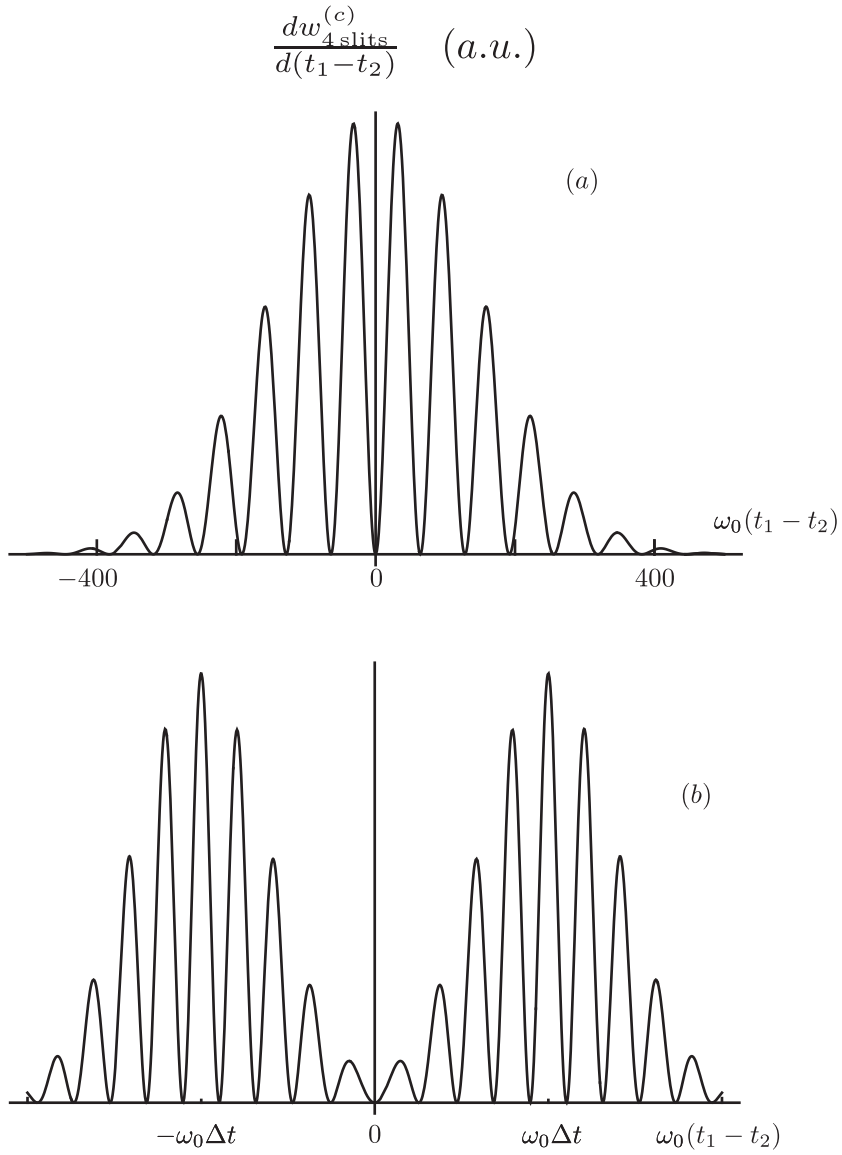

Рисунок 4.13 — Дифференциальная плотность вероятности совпадения в случае схемы измерений с четырьмя щелями $d^{4\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{split}}/d(t_1-t_2)$ в зависимости от $\xi = 0.1$; $(a)\,\omega_0\Delta t = 100$ и $(b)\,\omega_0\Delta t = 300$

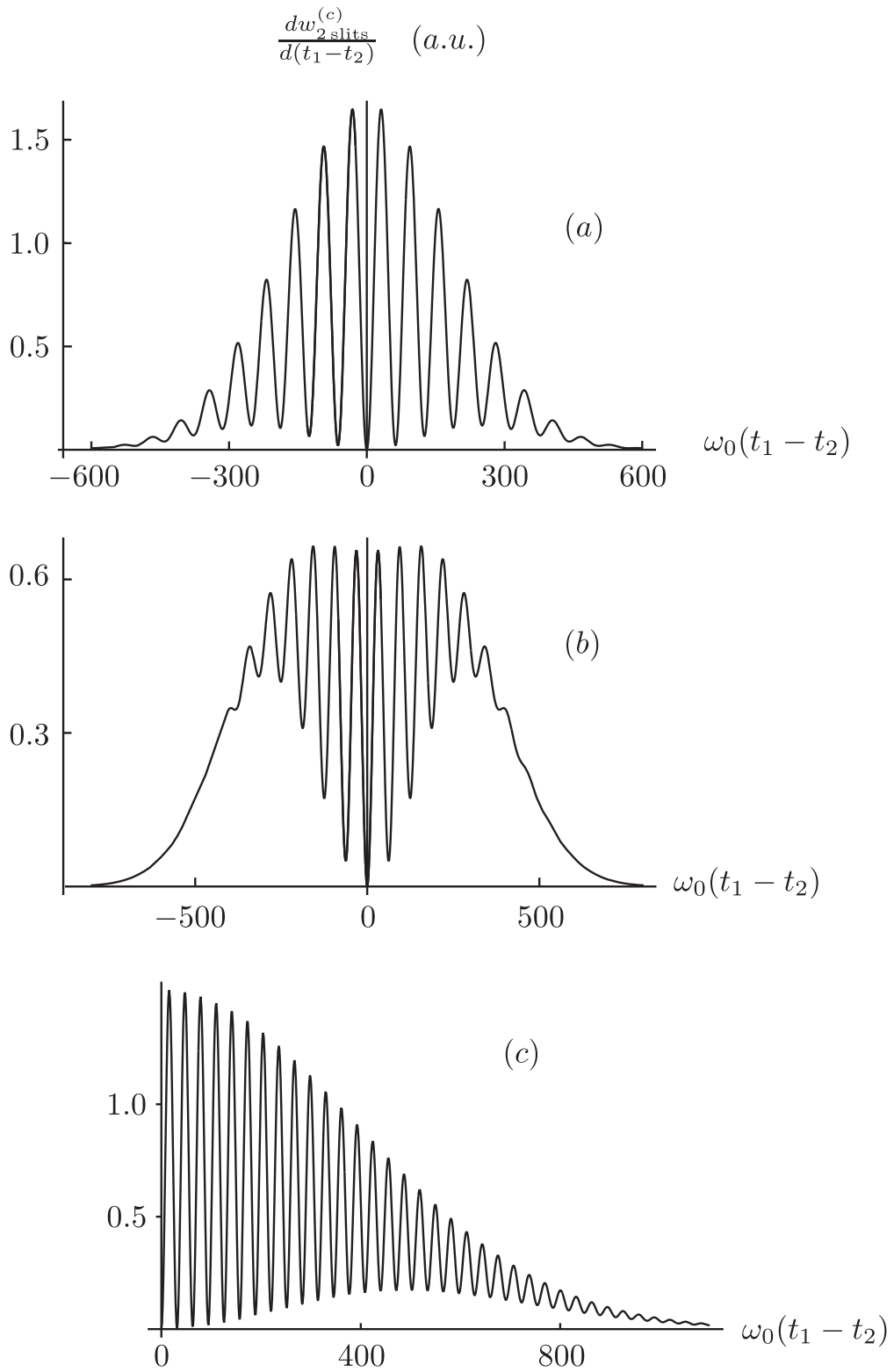

Рисунок 4.14 — Дифференциальная плотность вероятности совпадений для схемы измерений с двумя щелями $d^{2\,\mathrm{slits}}_{\mathrm{split}}/d(t_1-t_2)$ (4.35) как функция от $\omega_0(t_1-t_2)$ при $(a)\,\xi=0.1, \omega_0\Delta t=100$, $(b)\,\xi=0.1, \omega_0\Delta t=200$ и $(c)\,\xi=0.2, \omega_0\Delta t=200$

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получены аналитические выражения для Лоренц-инвариантной массы Гауссова импульса электромагнитного излучения и средней скорости его распространения в вакууме, меньшей, чем скорость света . Предложены схемы наблюдения эффекта замедления Гауссова импульса в дальней волновой зоне.

2. Численно рассчитаны Лоренц-инвариантная масса и средняя скорость распространения структурированных электромагнитных импульсов типа Лагерра-Гаусса, Эрмита-Гаусса, Бессель-Гаусса и Эйри-Гаусса. Установлено, что для всех типов импульсов их средняя скорость распространения меньше скорости света в вакууме.

3. Показано, что в случае СПРС в тонком кристалле ($L << L_D = w^2/\lambda$) Лоренц-инвариантная масса бифотонов оказывается пропорциональной параметру R, характеризующему степень углового перепутывания бифотона. Данный параметр определяется как отношение экспериментально измеримых ширин одночастичного углового распределения чисел фотонов и распределения, измеренного по схеме совпадений, что может быть использовано для прямого измерения Лоренц-инвариантной массы бифотона.

4. Показано, что частотная невырожденность, неколлинеарность и угловая селекция в схеме измерений с четырьмя щелями приводят к нетривиальным модификациям хорошо известного эффекта Хонга-Оу-Манделя, проявляющимся в появлении множественных осцилляций в зависимости сигнала совпадений от времени задержки в одном из каналов распространения фотонов.

Финансовая поддержка

Результаты данной диссертационной работы выполнены при финансовой поддержке:
Фонда теоретической физики и математики "БАЗИС"грант PhD - Student № $17-15-603-1$
Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ) грант мол_а № $18-32-00906$
Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ) грант А № $14-02-00811$

4.1 Персональные Благодарности

Я очень благодарен моему Научному Руководителю - д.ф.-м.н., профессору Фёдорову Михаилу Владимировичу, за переданные мне знания и навыки, всестороннюю помощь и отеческую поддержку. Также, я очень благодарен к.ф.-м.н. Филиппову Сергею Николаевичу - Руководителю лаборатории квантовой теории информации МФТИ за новые знания, умения, дружескую атмосферу, понимание и мотивацию.

Я особо благодарен моей жене Ольге за терпение, любовь и постоянную поддержку, также я благодарен моим родителям и братьям. Спасибо моим коллегам и близким друзьям Дмитрию Григорьеву, Илье Лучникову, Михаилу Разумовскому, Николаю Пестовскому, к.ф.-м.н. Борису Бантышу за критику и искреннюю поддержку.

Список сокращений и условных обозначений

ИСО - Инерциальная система отсчёта.

СТО - Специальная теория относительности.

КЭД - Квантовая электродинамика.

ЛИМ - Лоренц-инвариантная масса.

ЭМИ - Электромагнитный импульс. Данное обозначение введено во избежании путаницы с физической величиной - количеством движения(импульсом).

ТЭИ - Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

СПРС - Спонтанное Параметрическое Рассеяние света.

ХОМ - Эффект Хонга-Оу-Манделя.

BBO - кристалл Бэта Бората Бария

c.c. - сокращение complex conjugate, комплексное сопряжение.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Fedorov M. V.*, *Vintskevich S. V.* Diverging light pulses in vacuum: Lorentz-invariant mass and mean propagation speed // Laser Physics. — 2017. — Jan. — Vol. 27, no. 3. — P. 036202.
2. *Fedorov M. V.*, *Vintskevich S. V.*, *Grigoriev D. A.* Diffraction as a reason for slowing down light pulses in vacuum // EPL (Europhysics Letters). — 2017. — Март. — Т. 117, № 6. — С. 64001.
3. *Vintskevich S. V.*, *Grigoriev D. A.*, *Fedorov M. V.* Lorentz-invariant mass and entanglement of biphoton states // Laser Physics Letters. — 2019. — Май. — Т. 16, № 6. — С. 065203.
4. *Vintskevich S. V.*, *Grigoriev D. A.* Structured light pulses and their Lorentz-invariant mass // Laser Physics. — 2019. — June. — Vol. 29, no. 8. — P. 086001.
5. Temporal interference effects in noncollinear and frequency-nondegenerate spontaneous parametric down-conversion / M. V. Fedorov [et al.] // Phys. Rev. A. — 2018. — July. — Vol. 98, issue 1. — P. 013850.

Список литературы и публикации автора по теме диссертации

1. Roadmap on structured light / H. Rubinsztein-Dunlop [et al.] // Journal of Optics. — 2016. — Nov. — Vol. 19, no. 1. — P. 013001.
2. *Andrews D. L.* Structured Light and Its Applications. — Burlington : Academic Press, 2008. — P. xi.
3. High-dimensional quantum cryptography with twisted light / M. Mirhosseini [et al.] // New Journal of Physics. — 2015. — Vol. 17, no. 3. — P. 033033.
4. Efficient Sorting of Orbital Angular Momentum States of Light / G. C. G. Berkhout [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Oct. — Vol. 105, issue 15. — P. 153601.
5. Quantum teleportation of multiple degrees of freedom of a single photon / X.-L. Wang [et al.] // Nature. — 2015. — Vol. 518, no. 7540. — P. 516.
6. Quantized Rotation of Atoms from Photons with Orbital Angular Momentum / M. F. Andersen [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Oct. — Vol. 97, issue 17. — P. 170406.
7. Sculpting the Vortex State of a Spinor BEC / K. C. Wright [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Jan. — Vol. 102, issue 3. — P. 030405.
8. Persistent Currents in Spinor Condensates / S. Beattie [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Jan. — Vol. 110, issue 2. — P. 025301.
9. Blue-detuned optical ring trap for Bose-Einstein condensates based on conical refraction / A. Turpin [et al.] // Opt. Express. — 2015. — Jan. — Vol. 23, no. 2. — Pp. 1638–1650.
10. *Franke-Arnold S.* Optical angular momentum and atoms // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2017. — Vol. 375, no. 2087. — P. 20150435.
11. *Heintzmann R.*, *Gustafsson M. G.* Subdiffraction resolution in continuous samples // Nature Photonics. — 2009. — Vol. 3, no. 7. — P. 362.
12. Observation of subluminal twisted light in vacuum / F. Bouchard [et al.] // Optica. — 2016. — Apr. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 351–354.

13. *Saari P.* Reexamination of group velocities of structured light pulses // Phys. Rev. A. — 2018. — June. — Vol. 97, issue 6. — P. 063824.

14. *Alfano R. R.*, *Nolan D. A.* Slowing of Bessel light beam group velocity // Optics Communications. — 2016. — Vol. 361. — Pp. 25–27.

15. *Bareza N. D.*, *Hermosa N.* Subluminal group velocity and dispersion of Laguerre Gauss beams in free space // Scientific reports. — 2016. — Vol. 6. — P. 26842.

16. How fast is a twisted photon? / A. Lyons [et al.] // Optica. — 2018. — June. — Vol. 5, no. 6. — Pp. 682–686.

17. *Alexeev I.*, *Kim K. Y.*, *Milchberg H. M.* Measurement of the Superluminal Group Velocity of an Ultrashort Bessel Beam Pulse // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Jan. — Vol. 88, issue 7. — P. 073901.

18. *Борн М.*, *Вольф Э.* Основы оптики. — 1973.

19. *Silenko A. J.*, *Zhang P.*, *Zou L.* Relativistic quantum-mechanical description of twisted paraxial electron and photon beams // Phys. Rev. A. — 2019. — Sept. — Vol. 100, issue 3. — P. 030101.

20. *Saari P.*, *Rebane O.*, *Besieris I.* Energy-flow velocities of nondiffracting localized waves // Phys. Rev. A. — 2019. — July. — Vol. 100, issue 1. — P. 013849.

21. Spatially structured photons that travel in free space slower than the speed of light / D. Giovannini [et al.] // Science. — 2015. — Vol. 347, no. 6224. — Pp. 857–860.

22. *Hong C. K.*, *Ou Z. Y.*, *Mandel L.* Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Nov. — Vol. 59, issue 18. — Pp. 2044–2046.

23. *Ou Z.-Y. J.* Multi-photon quantum interference. Vol. 43. — Springer, 2007.

24. *Braunstein S. L.*, *Loock P. van* Quantum information with continuous variables // Rev. Mod. Phys. — 2005. — June. — Vol. 77, issue 2. — Pp. 513–577.

25. *Dell'Anno F.*, *Siena S. D.*, *Illuminati F.* Multiphoton quantum optics and quantum state engineering // Physics Reports. — 2006. — Vol. 428, no. 2. — Pp. 53–168.

26. Qutrit State Engineering with Biphotons / Y. I. Bogdanov [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Dec. — Vol. 93, issue 23. — P. 230503.

27. *Bogdanov A. Y.*, *Bogdanov Y. I.*, *Valiev K. A.* Schmidt modes and entanglement in continuous-variable quantum systems // Russian Microelectronics. — 2006. — Jan. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 7–20.

28. Linear optical quantum computing with photonic qubits / P. Kok [et al.] // Rev. Mod. Phys. — 2007. — Jan. — Vol. 79, issue 1. — Pp. 135–174.

29. *Kim Y.-H.*, *Kulik S. P.*, *Shih Y.* Quantum Teleportation of a Polarization State with a Complete Bell State Measurement // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Feb. — Vol. 86, issue 7. — Pp. 1370–1373.

30. *Andreev V. A.*, *Man'ko V. I.* Quantum tomography of spin states and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. — 2000. — Apr. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 122–125.

31. Symbols of Multiqubit States Admitting a Physical Interpretation / P. Adam [et al.] // Journal of Russian Laser Research. — 2018. — July. — Vol. 39, no. 4. — Pp. 360–375.

32. *Lvovsky A. I.*, *Raymer M. G.* Continuous-variable optical quantum-state tomography // Rev. Mod. Phys. — 2009. — Mar. — Vol. 81, issue 1. — Pp. 299–332.

33. Multiphoton entanglement and interferometry / J.-W. Pan [и др.] // Rev. Mod. Phys. — 2012. — Май. — Т. 84, вып. 2. — С. 777—838.

34. *Takeoka M.*, *Jin R.-B.*, *Sasaki M.* Full analysis of multi-photon pair effects in spontaneous parametric down conversion based photonic quantum information processing // New Journal of Physics. — 2015. — Vol. 17, no. 4. — P. 043030.

35. Parametric down-conversion photon-pair source on a nanophotonic chip / X. Guo [et al.] // Light: Science &Amp; Applications. — 2017. — May. — Vol. 6. — e16249.

36. *Klyshko D. N.* Photons Nonlinear Optics. — Routledge, 2018.

37. *Klyshko D. N.* Coherent decay of photons in a nonlinear medium // Sov. Phys. JETP Lett. — 1967. — Vol. 6, issue 1. — Pp. 23–25.

38. *Zeldovich B.*, *Klyshko D.* Field Statistics in Parametric Luminescence // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. — 1969. — Jan. — Vol. 9. — P. 40.

39. *Burnham D. C.*, *Weinberg D. L.* Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs // Phys. Rev. Lett. — 1970. — July. — Vol. 25, issue 2. — Pp. 84–87.

40. *Schneeloch J.*, *Howell J. C.* Introduction to the transverse spatial correlations in spontaneous parametric down-conversion through the biphoton birth zone // Journal of Optics. — 2016. — Т. 18, № 5. — С. 053501.

41. Time-resolved two-photon quantum interference / T. Legero [et al.] // Applied Physics B. — 2003. — Dec. — Vol. 77, no. 8. — Pp. 797–802.

42. *Louisell W. H.*, *Yariv A.*, *Siegman A. E.* Quantum Fluctuations and Noise in Parametric Processes. I. // Phys. Rev. — 1961. — Dec. — Vol. 124, issue 6. — Pp. 1646–1654.

43. *Gordon J. P.*, *Louisell W. H.*, *Walker L. R.* Quantum Fluctuations and Noise in Parametric Processes. II // Phys. Rev. — 1963. — Jan. — Vol. 129, issue 1. — Pp. 481–485.

44. *Окунь Л. Б.* О письме Р.И. Храпко "Что есть масса?" // Усп. физ. наук. — 2000. — Т. 170, № 12. — С. 1366—1371.

45. *Окунь Л. Б.* Понятие массы (Масса, энергия, относительность) // Усп. физ. наук. — 1989. — Т. 158, № 7. — С. 511—530.

46. *Okun L. B.* Energy and mass in relativity theory. — World Scientific, 2009.

47. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Теория поля. — Москва; Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1941.

48. *Мизнер Ч.*, *Торн К.*, *Уилер Д.* Гравитация. — Рипол Классик, 1977.

49. *Rivlin L. A.* Is the photon mass zero? // Soviet Journal of Quantum Electronics. — 1992. — Aug. — Vol. 22, no. 8. — Pp. 771–773.

50. *Ривлин Л. А.* Энергия образования волновода как мера его критической частоты // Усп. физ. наук. — 1991. — Т. 161, № 3. — С. 143—148.

51. *Rivlin L. A.* Photon mass as an equivalent of the energy of field compression into a waveguide mode // Quantum Electronics. — 1995. — Mar. — Vol. 25, no. 3. — Pp. 275–277.

52. *Ривлин Л. А.* Фотоны в волноводе (несколько мысленных экспериментов) // Усп. физ. наук. — 1997. — Т. 167, № 3. — С. 309—322.

53. *Power E. A.* Introductory quantum electrodynamics. — American Elsevier Publishing Company, 1965.

54. *Скалли М. О.*, *Зубайри М. С.* Квантовая оптика. — Физматлит, 2003.

55. *Шляйх В. П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве. — Физматлит, 2005.

56. *Ахиезер А. И.*, *Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. — Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1959.

57. *Pike E. R.*, *Sarkar S.* Spatial dependence of weakly localized single-photon wave packets // Phys. Rev. A. — 1987. — Jan. — Vol. 35, issue 2. — Pp. 926–928.

58. *Pike E. R.*, *Sarkar S.* The quantum theory of radiation. Vol. 86. — Clarendon Press, 1995.

59. *Newton T. D.*, *Wigner E. P.* Localized States for Elementary Systems // Rev. Mod. Phys. — 1949. — July. — Vol. 21, issue 3. — Pp. 400–406.

60. *Jauch J.*, *Piron C.* Generalized localizability // Helv. Phys. Acta. — 1967. — Jan. — Vol. 40, no. 559.

61. *Amrein W. O.* Localizability for particles of mass zero // Helv. Phys. Acta. — 1969. — Vol. 42. — Pp. 149–190.

62. *Deutsch I. H.*, *Garrison J. C.* Paraxial quantum propagation // Phys. Rev. A. — 1991. — Mar. — Vol. 43, issue 5. — Pp. 2498–2513.

63. *Kálnay A. J.* Lorentz-Invariant Localization for Elementary Systems. III. Zero-Mass Systems // Phys. Rev. D. — 1971. — May. — Vol. 3, issue 10. — Pp. 2357–2363.

64. *Bialynicki-Birula I.* Exponential Localization of Photons // Phys. Rev. Lett. — 1998. — June. — Vol. 80, issue 24. — Pp. 5247–5250.

65. *Landau L.*, *Peierls R.* Quantenelektrodynamik im konfigurationsraum // Zeitschrift fur Physik A Hadrons and Nuclei. — 1930. — Vol. 62, no. 3. — Pp. 188–200.

66. *Cook R. J.* Photon dynamics // Phys. Rev. A. — 1982. — Apr. — Vol. 25, issue 4. — Pp. 2164–2167.

67. *Cook R. J.* Lorentz covariance of photon dynamics // Phys. Rev. A. — 1982. — Nov. — Vol. 26, issue 5. — Pp. 2754–2760.

68. *Inagaki T.* Quantum-mechanical approach to a free photon // Phys. Rev. A. — 1994. — Apr. — Vol. 49, issue 4. — Pp. 2839–2843.

69. *Bialynicki-Birula I.* On the Wave Function of the Photon // Acta Physica Polonica A. — 1994. — Vol. 86, no. 1–2. — Pp. 97–116.

70. *Bialynicki-Birula I.* V Photon Wave Function //. Vol. 36 / ed. by E. Wolf. — Elsevier, 1996. — Pp. 245–294. — (Progress in Optics).

71. *Bialynicki-Birula I.*, *Bialynicka-Birula Z.* Uncertainty Relation for Photons // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Apr. — Vol. 108, issue 14. — P. 140401.

72. *Silberstein L.* Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung // Annalen der Physik. — 1907. — Vol. 327, no. 3. — Pp. 579–586.

73. *Kaiser G.* Helicity, polarization and Riemann - Silberstein vortices // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. — 2004. — Apr. — Vol. 6, no. 5. — S243–S245.

74. *Bialynicki-Birula I.*, *Bialynicka-Birula Z.* The role of the Riemann–Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2013. — Jan. — Vol. 46, no. 5. — P. 053001.

75. *Smith B. J.*, *Raymer M. G.* Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory // New Journal of Physics. — 2007. — Nov. — Vol. 9, no. 11. — Pp. 414–414.

76. *Mandel L.* Configuration-Space Photon Number Operators in Quantum Optics // Phys. Rev. — 1966. — Apr. — Vol. 144, issue 4. — Pp. 1071–1077.

77. *Durnin J.*, *Reece C.*, *Mandel L.* Does a photodetector always measure the rate of arrival of photons? // J. Opt. Soc. Am. — 1981. — Jan. — Vol. 71, no. 1. — Pp. 115–117.

78. *Scully M. O.*, *Drühl K.* Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and "delayed choice" in quantum mechanics // Phys. Rev. A. — 1982. — Apr. — Vol. 25, issue 4. — Pp. 2208–2213.

79. *Scully M. O.* Photon-photon correlations from single atoms // Advances in Quantum Phenomena. — 1995. — Pp. 335–346.

80. *Rathe U. W.*, *Scully M. O.* Theoretical basis for a new subnatural spectroscopy via correlation interferometry // Letters in Mathematical Physics. — 1995. — July. — Vol. 34, no. 3. — Pp. 297–307.

81. *Kaiser G.* Electromagnetic inertia, reactive energy and energy flow velocity // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2011. — Aug. — Vol. 44, no. 34. — P. 345206.

82. *Vintskevich S. V.*, *Veselago V. G.*, *Fedorov M. V.* On a possible definition of the concept of 'mass density' for a classical electromagnetic field in vacuum // Laser Physics Letters. — 2015. — Aug. — Vol. 12, no. 9. — P. 096201.

83. *Lakes R.* Experimental Limits on the Photon Mass and Cosmic Magnetic Vector Potential // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Mar. — Vol. 80, issue 9. — Pp. 1826–1829.

84. New Experimental Limit on the Photon Rest Mass with a Rotating Torsion Balance / J. Luo [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Feb. — Vol. 90, issue 8. — P. 081801.

85. *Yang Y.-P.*, *Zhang B.* Tight Constraint on Photon Mass from Pulsar Spindown. — 2017. — June.

86. Photon mass limits from fast radio bursts / L. Bonetti [et al.] // Physics Letters B. — 2016. — Vol. 757. — Pp. 548–552.

87. FRB 121102 casts new light on the photon mass / L. Bonetti [et al.] // Physics Letters B. — 2016. — Vol. 768. — Pp. 326–329.

88. FRB 121102 casts new light on the photon mass / L. Bonetti [et al.] // Physics Letters B. — 2016. — Vol. 768. — Pp. 326–329.

89. New limits on the photon mass with radio pulsars in the Magellanic clouds / J.-J. Wei [et al.] // Research in Astronomy and Astrophysics. — 2017. — Feb. — Vol. 17, no. 2. — P. 13.

90. *Shao L.*, *Zhang B.* Bayesian framework to constrain the photon mass with a catalog of fast radio bursts // Phys. Rev. D. — 2017. — June. — Vol. 95, issue 12. — P. 123010.

91. *Rätzel D.*, *Wilkens M.*, *Menzel R.* Gravitational properties of light—the gravitational field of a laser pulse // New Journal of Physics. — 2016. — Jan. — Vol. 18, no. 2. — P. 023009.

92. *Schneiter F.*, *Rätzel D.*, *Braun D.* The gravitational field of a laser beam beyond the short wavelength approximation // Classical and Quantum Gravity. — 2018. — Sept. — Vol. 35, no. 19. — P. 195007.

93. *Saleh B. E. A.*, *Teich M. C.* Fundamentals of photonics; 2nd ed. — New York, NY : Wiley, 2007. — (Wiley series in pure and applied optics).

94. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen [et al.] // Phys. Rev. A. — 1992. — June. — Vol. 45, issue 11. — Pp. 8185–8189.

95. *Yao A. M.*, *Padgett M. J.* Orbital angular momentum: origins, behavior and applications // Advances in Optics and Photonics. — 2011. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 161–204.

96. *Padgett M. J.* Orbital angular momentum 25 years on // Optics express. — 2017. — Vol. 25, no. 10. — Pp. 11265–11274.

97. *Padgett M.* Light's twist // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2014. — Vol. 470, no. 2172. — P. 20140633.

98. *Абрамочкин Е. Г.*, *Волостников В. Г.* Спиральные пучки света // Усп. физ. наук. — 2004. — Т. 174, № 12. — С. 1273—1300.

99. *Durnin J.*, *Miceli J. J.*, *Eberly J. H.* Diffraction-free beams // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Apr. — Vol. 58, issue 15. — Pp. 1499–1501.

100. *Greene P. L.*, *Hall D. G.* Properties and diffraction of vector Bessel–Gauss beams // JOSA A. — 1998. — Vol. 15, no. 12. — Pp. 3020–3027.

101. *Hall D. G.* Vector-beam solutions of Maxwell's wave equation // Optics letters. — 1996. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 9–11.

102. *Zhan Q.* Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications // Advances in Optics and Photonics. — 2009. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 1–57.

103. *Siviloglou G. A.*, *Christodoulides D. N.* Accelerating finite energy Airy beams // Optics letters. — 2007. — Vol. 32, no. 8. — Pp. 979–981.

104. *Akhmanov S.*, *Vysloukh V.*, *Chirkin A.* Optics of femtosecond laser pulses. — American Institute of Physics, 1992. — ISBN 9780883188514.

105. *Christov I.* Propagation of femtosecond light pulses // Optics communications. — 1985. — Vol. 53, no. 6. — Pp. 364–366.

106. *Caron C. F. R.*, *Potvliege R. M.* Free-space propagation of ultrashort pulses: Space-time couplings in Gaussian pulse beams // Journal of Modern Optics. — 1999. — Vol. 46, no. 13. — Pp. 1881–1891.

107. *Porras M. A.* Diffraction-free and dispersion-free pulsed beam propagation in dispersive media // Optics letters. — 2001. — Vol. 26, no. 17. — Pp. 1364–1366.

108. *Sheppard C.*, *Gan X.* Free-space propagation of femto-second light pulses // Optics communications. — 1997. — Vol. 133, no. 1–6. — Pp. 1–6.

109. *Trebino R.* Frequency-resolved optical gating: the measurement of ultrashort laser pulses. — Springer Science & Business Media, 2012.

110. Measuring ultrashort laser pulses in the time-frequency domain using frequency-resolved optical gating / R. Trebino [et al.] // Review of Scientific Instruments. — 1997. — Vol. 68, no. 9. — Pp. 3277–3295.

111. *Glauber R. J.* Coherent and Incoherent States of the Radiation Field // Phys. Rev. — 1963. — Sept. — Vol. 131, issue 6. — Pp. 2766–2788.

112. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — Рипол Классик, 2013.

113. *Gupta S. N.* Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics // Proceedings of the Physical Society. Section A. — 1950. — Vol. 63, no. 7. — P. 681.

114. *Bleuler K.* A New method of treatment of the longitudinal and scalar photons // Helv. Phys. Acta. — 1950. — Vol. 23. — Pp. 567–586.

115. *Feynman R. P.*, *Leighton R. B.*, *Sands M.* he Feynman Lectures on Physics. I., Chapter 27. — Addison Wesley, 1964.

116. *Батыгин В. В.*, *Топтыгин И. Н.* Современная электродинамика. Микроскопическая теория. Том 1. — Москва-Ижевск:Институт компьютерных исследований, 2003.

117. Anisotropically and High Entanglement of Biphoton States Generated in Spontaneous Parametric Down-Conversion / M. V. Fedorov [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99. — P. 063901.

118. Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions / M. V. Fedorov [et al.] // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 77. — P. 032336.

119. *Fedorov M.*, *Miklin N.* Schmidt modes and entanglement // Contemporary Physics. — 2014. — Vol. 55. — P. 94.

120. Short-pulse or strong-field breakup processes: a route to study entangled wave packets / M. Fedorov [et al.] // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2006. — Vol. 39. — S467.

121. *Mauerer W.*, *Silberhorn C.* Numerical Analysis of Parametric Downconversion // AIP Conference Proceedings. — 2009. — Vol. 1110, no. 1. — Pp. 220–223.

122. *Fedorov M. V.* Schmidt decomposition for non-collinear biphoton angular wave functions // Physica Scripta. — 2015. — Vol. 90, no. 7. — P. 074048.

123. *Mikhailova Y. M.*, *Volkov P. A.*, *Fedorov M. V.* Biphoton wave packets in parametric down-conversion: Spectral and temporal structure and degree of entanglement // Phys. Rev. A. — 2008. — Dec. — Vol. 78, issue 6. — P. 062327.

124. Characterization of spectral entanglement of spontaneous parametric-down conversion biphotons in femtosecond pulsed regime / G. G. Brida [et al.] // EPL (Europhysics Letters). — 2009. — Sept. — Vol. 87, no. 6. — P. 64003.

125. *Abouraddy A. F.*, *Yarnall T. M.*, *Di Giuseppe G.* Phase-unlocked Hong-Ou-Mandel interferometry // Phys. Rev. A. — 2013. — June. — Vol. 87, issue 6. — P. 062106.

126. *Shih Y. H.*, *Sergienko A. V.* Observation of quantum beating in a simple beam-splitting experiment: Two-particle entanglement in spin and space-time // Phys. Rev. A. — 1994. — Sept. — Vol. 50, issue 3. — Pp. 2564–2568.

127. Double-slit interference of biphotons generated in spontaneous parametric downconversion from a thick crystal / A. F. Abouraddy [et al.] // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. — 2001. — Feb. — Vol. 3, no. 1. — S50–S54.

128. Hong–Ou–Mandel effect in terms of the temporal biphoton wave function with two arrival-time variables / M. V. Fedorov [et al.] // Laser Physics Letters. — 2018. — Feb. — Vol. 15, no. 3. — P. 035206.

Приложение А

Результаты моделирования распространения в вакууме локализованных электромагнитных импульсов и расчёта их Лоренц-инвариантной массы, а также средней скорости распространения.

В приложении представлены ЭМИ задаваемые с помощью пучков - Гаусса, Лагерр-Гаусса, Бессель-Гаусса, Эрмит-Гаусса и Эйри-Гаусса. Значения длительности, энергии и перетяжки зафиксированы.

Пространственная конфигурация ЭМИ всех типов определятся с помощью задания комплексной амплитуды в плоскости $z = 0$. Временная огибающая задана в форме (2.41). Граничное условие в плоскости $z = 0$ для пространственной части Гауссова ЭМИ:

$$A_{\text{Gauss}}(\vec{r})|_{z=0} = A_0 \vec{e}_{45^\circ} \exp\big[-\frac{\rho^2}{2w_0^2} \big], \tag{A.1}$$

где $\vec{e}_{45^\circ} = 1/\sqrt{2}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, A_0 - константа нормировки, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, w_0 - перетяжка ЭМИ в плоскости $z = 0$.

Граничное условие в плоскости $z = 0$ для пространственной части Лагерра-Гауссова и Бессель-Гауссова ЭМИ:

$$\vec{A}_{LG}\,(\rho)|_{z=0} = C_{LG}\vec{e}_\phi \left(\frac{\rho_\perp}{w_0}\right)^l e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2}} \mathcal{L}_q^l \left(\frac{2\rho^2}{w_0^2}\right) e^{-il\phi}$$

$$\vec{A}_{BG}\,(\rho)|_{z=0} = C_{BG}\vec{e}_\phi \mathcal{J}_1\,(\beta\rho)\, e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2}}, \tag{A.2}$$

где C_{LG} и C_{BG} - константы. $\mathcal{L}_l^q\,(.)$ - обозначение для обобщённых полиномов Лагерра, l,m - положительные целые числа, $\mathcal{J}_1$ - функция Бесселя первого рода порядка 1. Поляризация выбрана азимутальной $\vec{e}_\phi$

Граничное условие в плоскости $z = 0$ для пространственной части для Эрмит-Гауссова ЭМИ

$$A_{HG} = \vec{e}_{45^\circ} C_{HG} \mathcal{H}_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) e^{-\frac{x^2}{w_0^2}} \mathcal{H}_q \left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0}\right) e^{-\frac{y^2}{w_0^2}}, \tag{A.3}$$

Граничное условие в плоскости $z = 0$ для пространственной части для Эйри-Гауссова ЭМИ

$$A_{AG} = \vec{e}_{45^\circ} C_{AG} \mathcal{A}i\left(\frac{x}{w_0}\right) e^{-\frac{x^2}{w_0^2}} \mathcal{A}i\left(\frac{y}{w_0}\right) e^{-\frac{y^2}{w_0^2}}, \tag{A.4}$$

где $\mathcal{A}i\,(.)$ - функция Эйри.

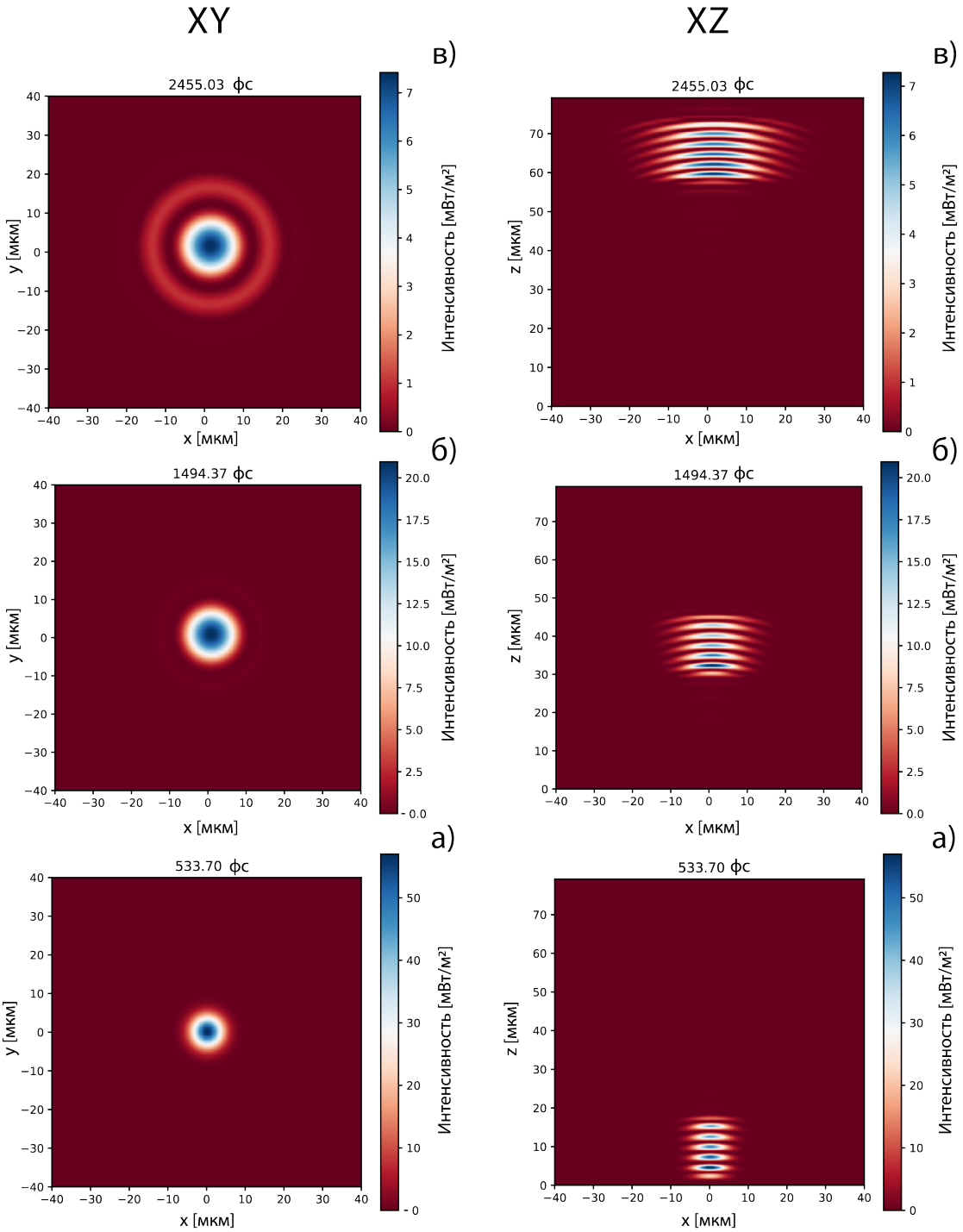

Рисунок А.1 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Гауссова ЭМИ: $m = 1.811 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $1.324 \cdot 10^{-4}$

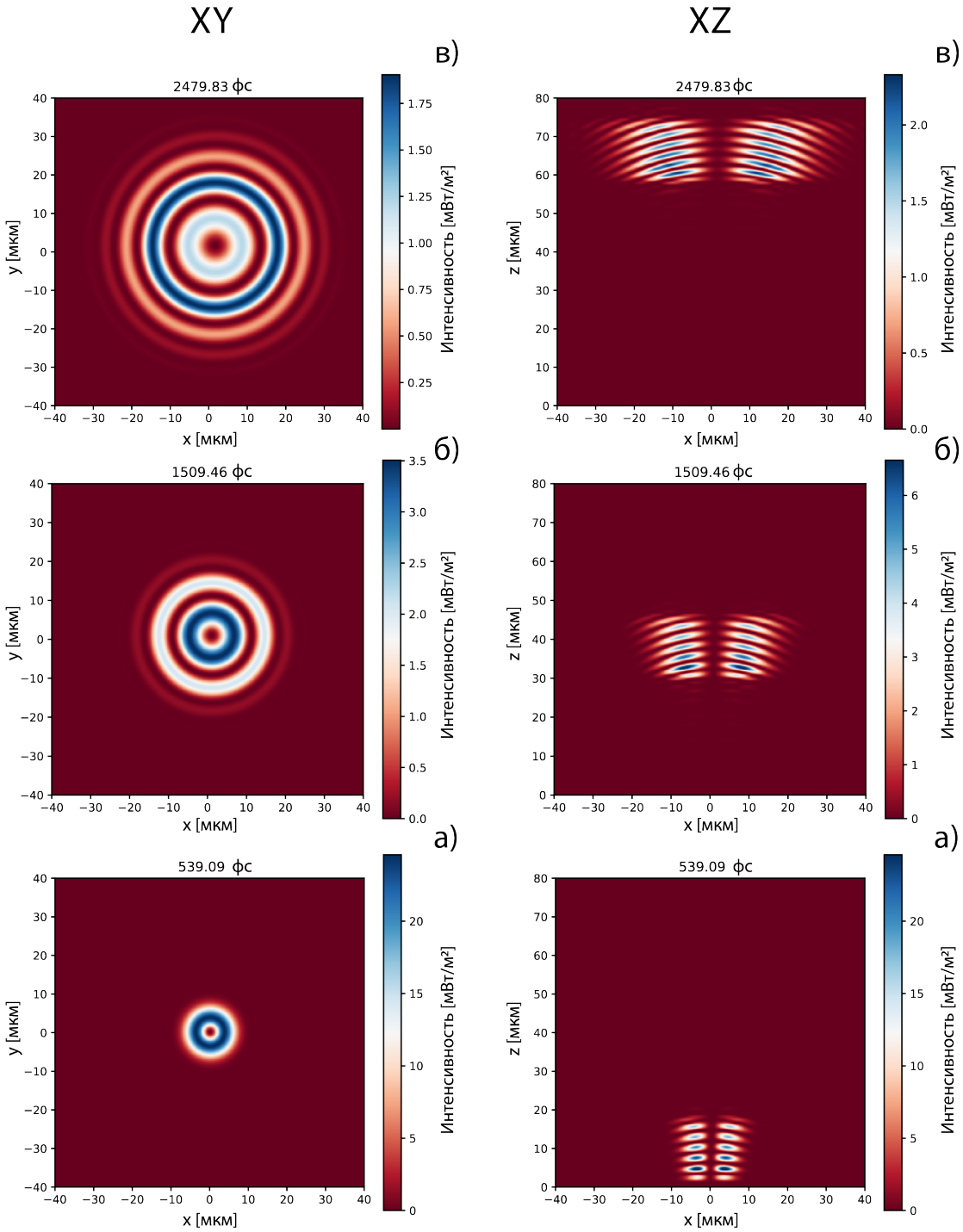

Рисунок А.2 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Бессель-Гауссова ЭМИ: $m = 2.898 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $3.392 \cdot 10^{-4}$

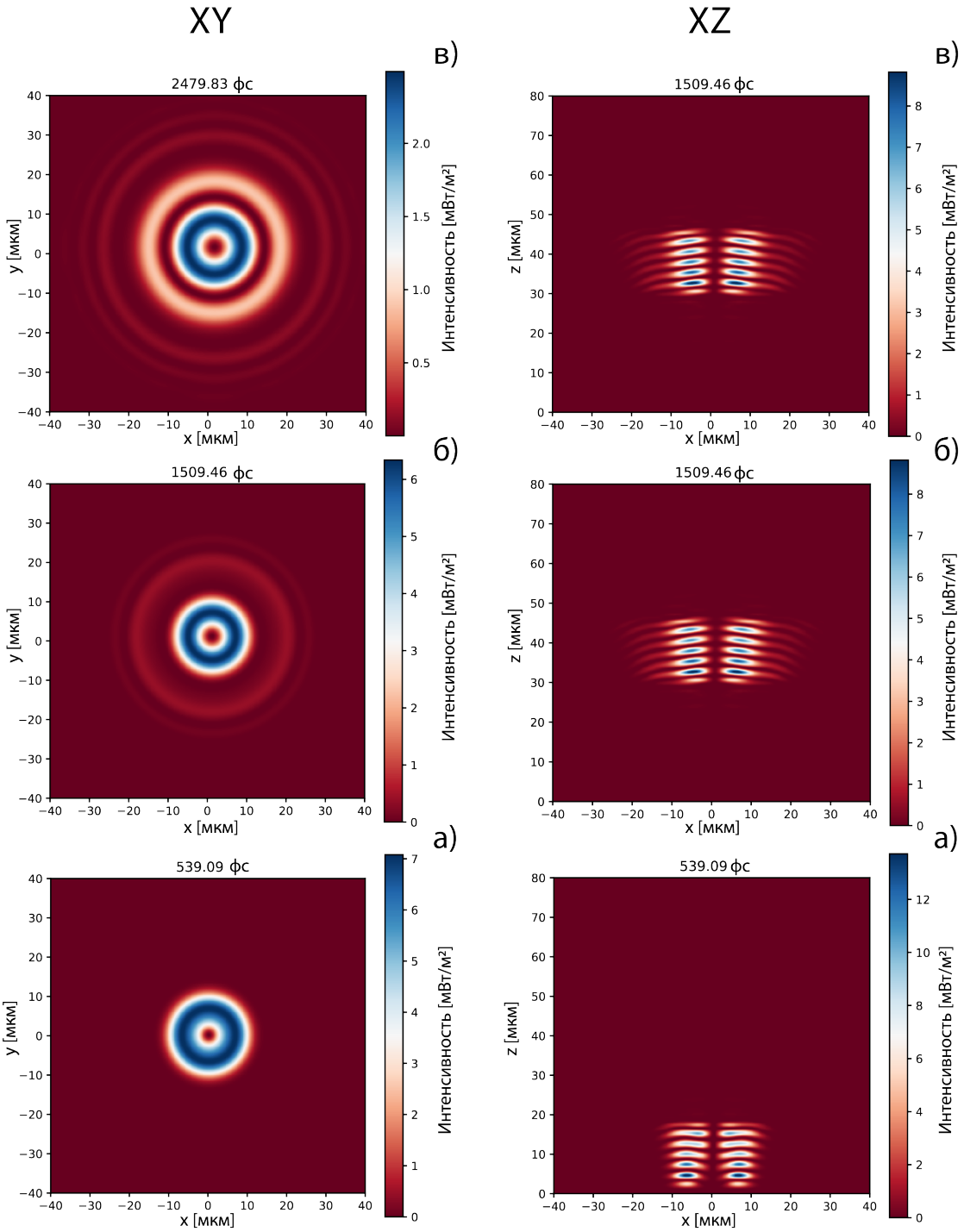

Рисунок А.3 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Бессель-Гауссова ЭМИ с параметрами: $m = 2.228 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $2.006 \cdot 10^{-4}$

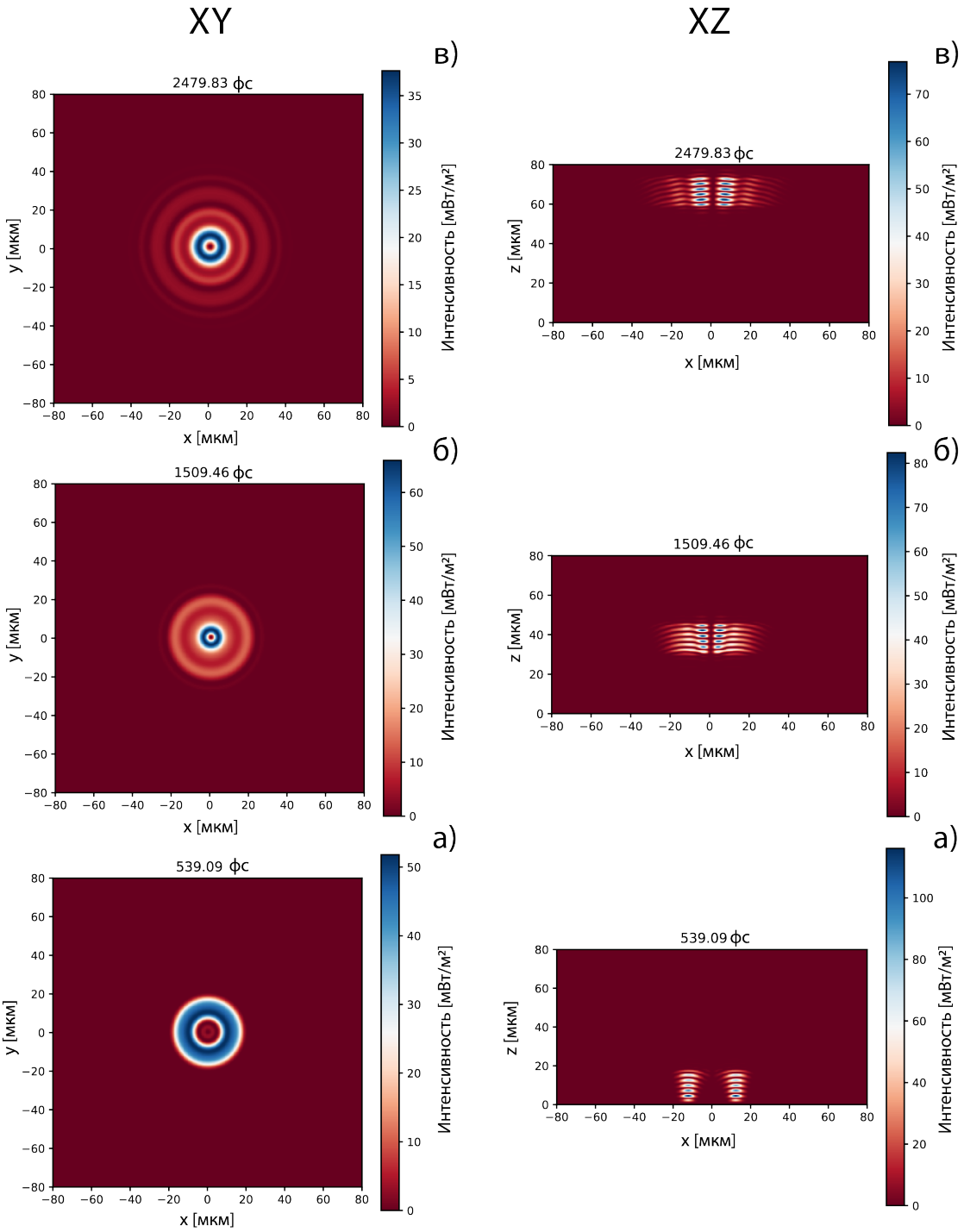

Рисунок А.4 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Бессель-Гауссова ЭМИ с параметрами: $m = 1.943 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $1.525 \cdot 10^{-4}$

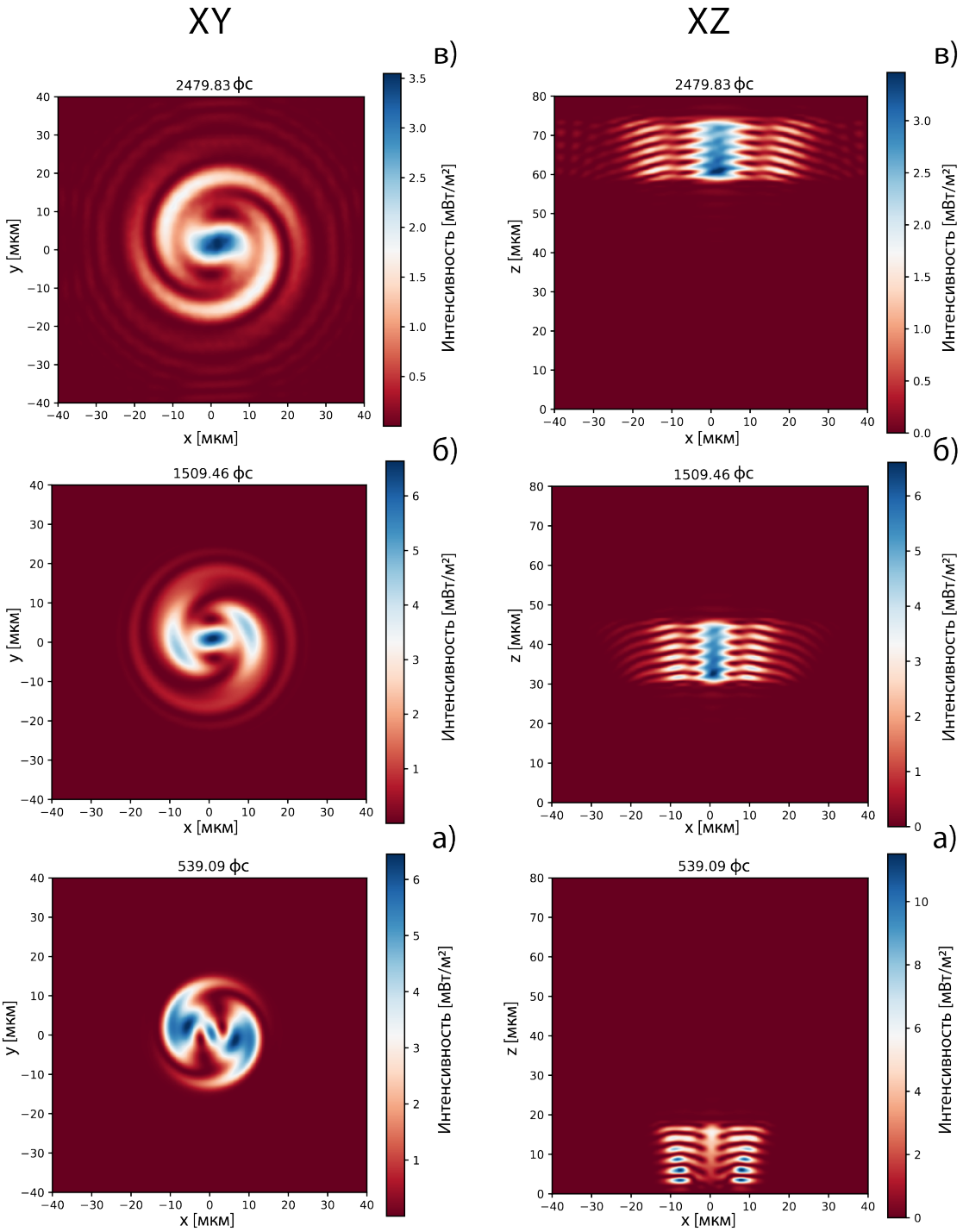

Рисунок А.5 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Лагерр-Гауссова ЭМИ с параметрами $m = 2.763 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $3.084 \cdot 10^{-4}$

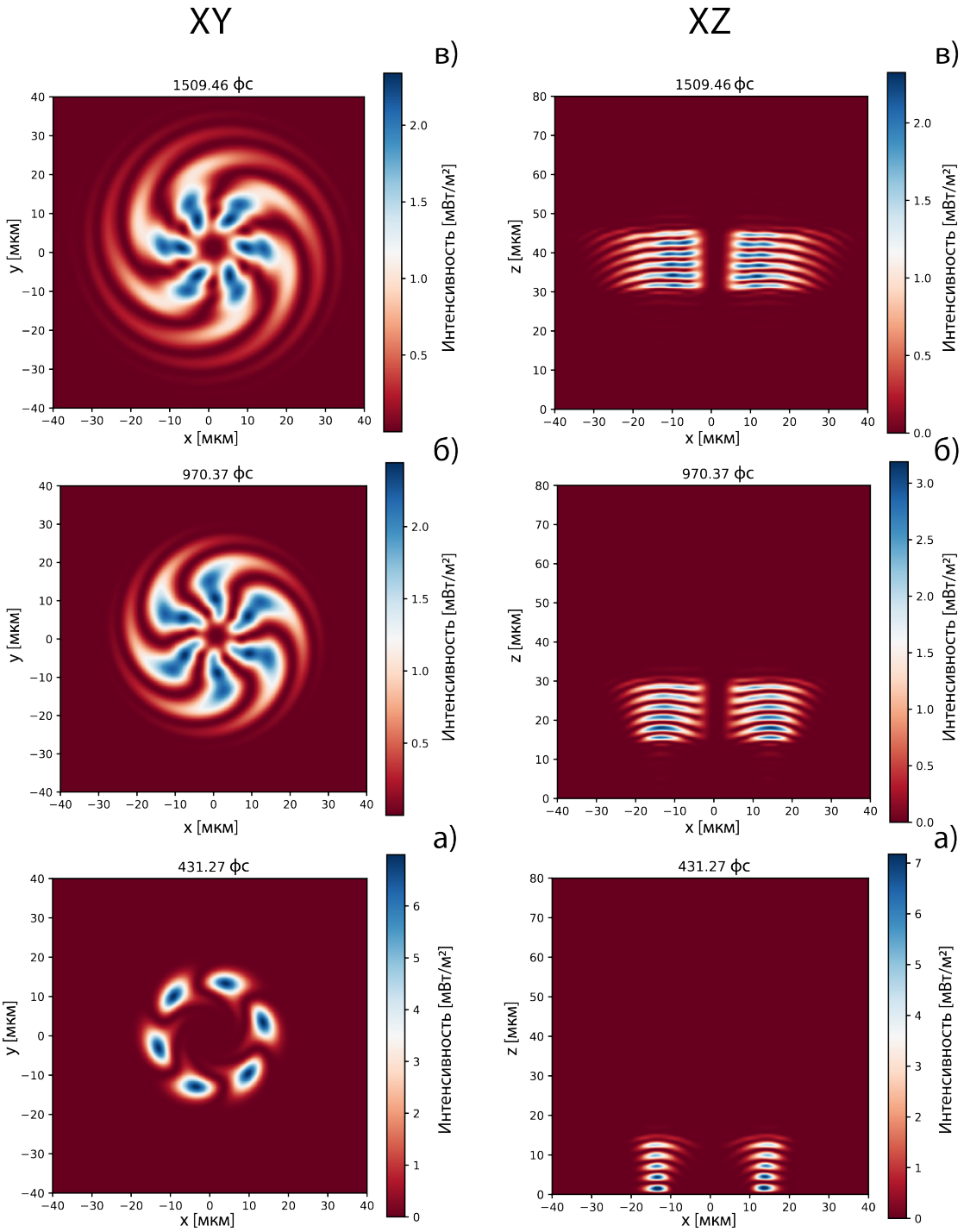

Рисунок А.6 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Лагерр-Гауссова ЭМИ с параметрами $m = 2.798 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $3.163 \cdot 10^{-4}$

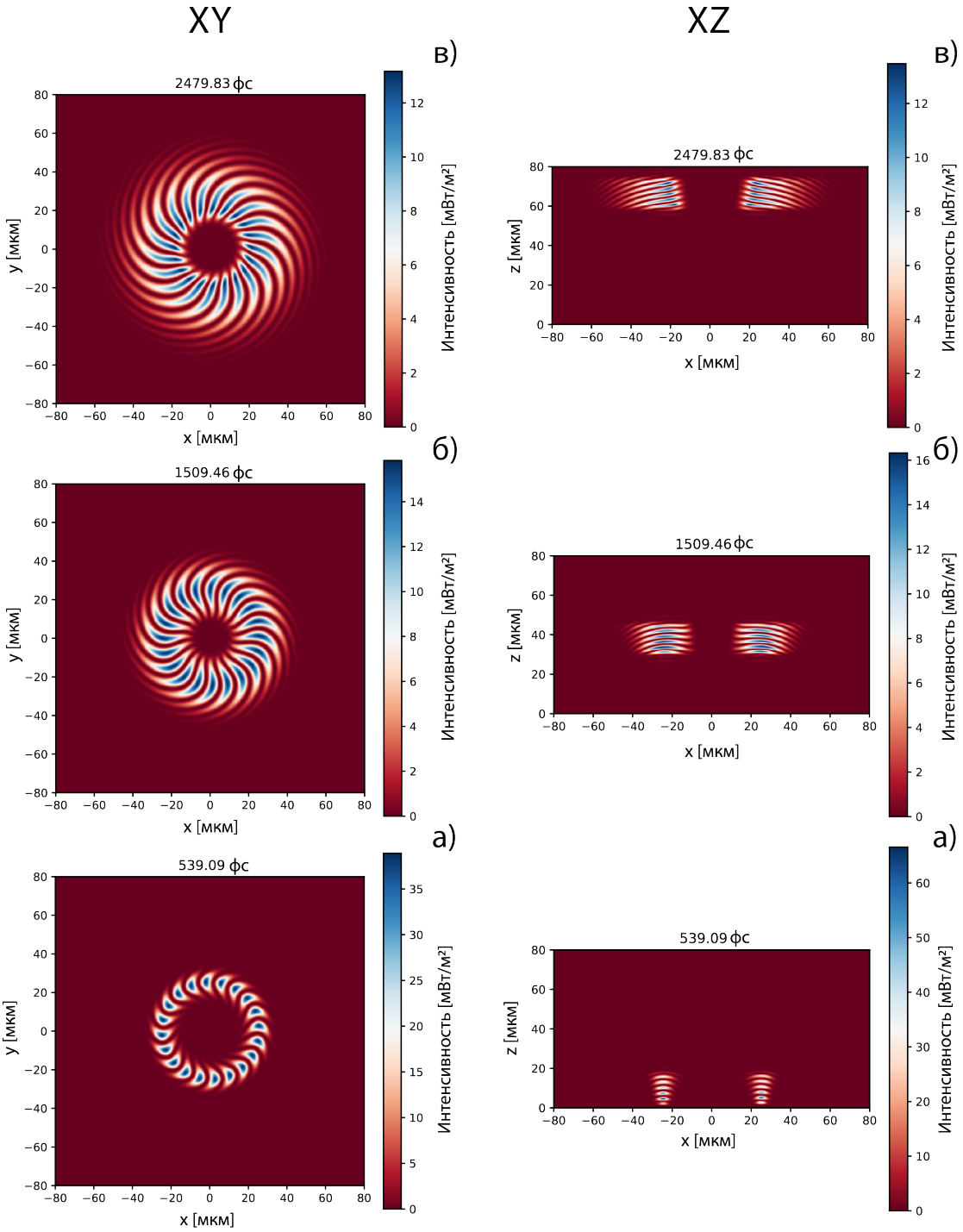

Рисунок А.7 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Лагерр-Гауссова ЭМИ с параметрами $m = 3.647 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $5.372 \cdot 10^{-4}$

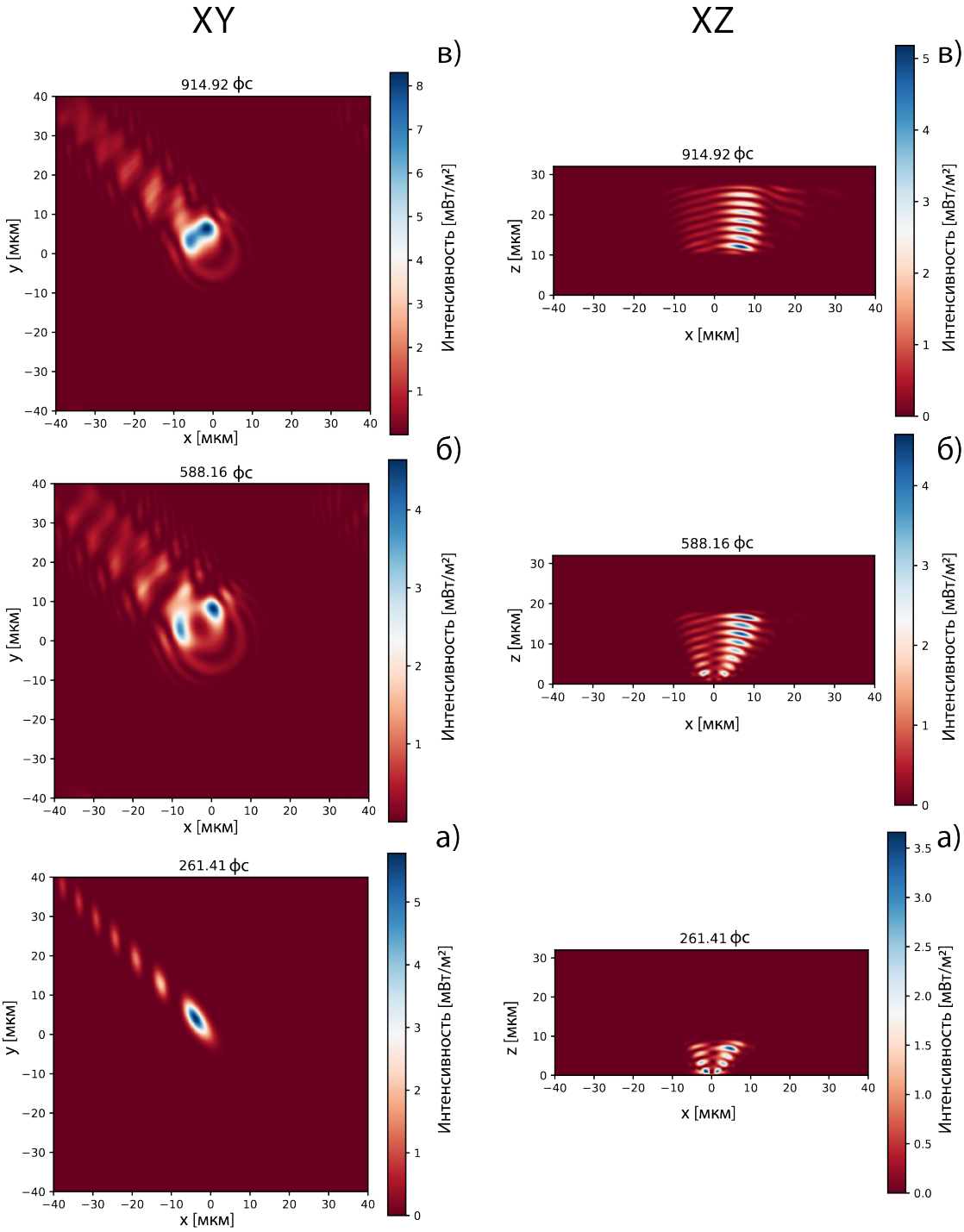

Рисунок А.8 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Эйри-Гауссова ЭМИ с параметрами $m = 4.824 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $9.404 \cdot 10^{-4}$

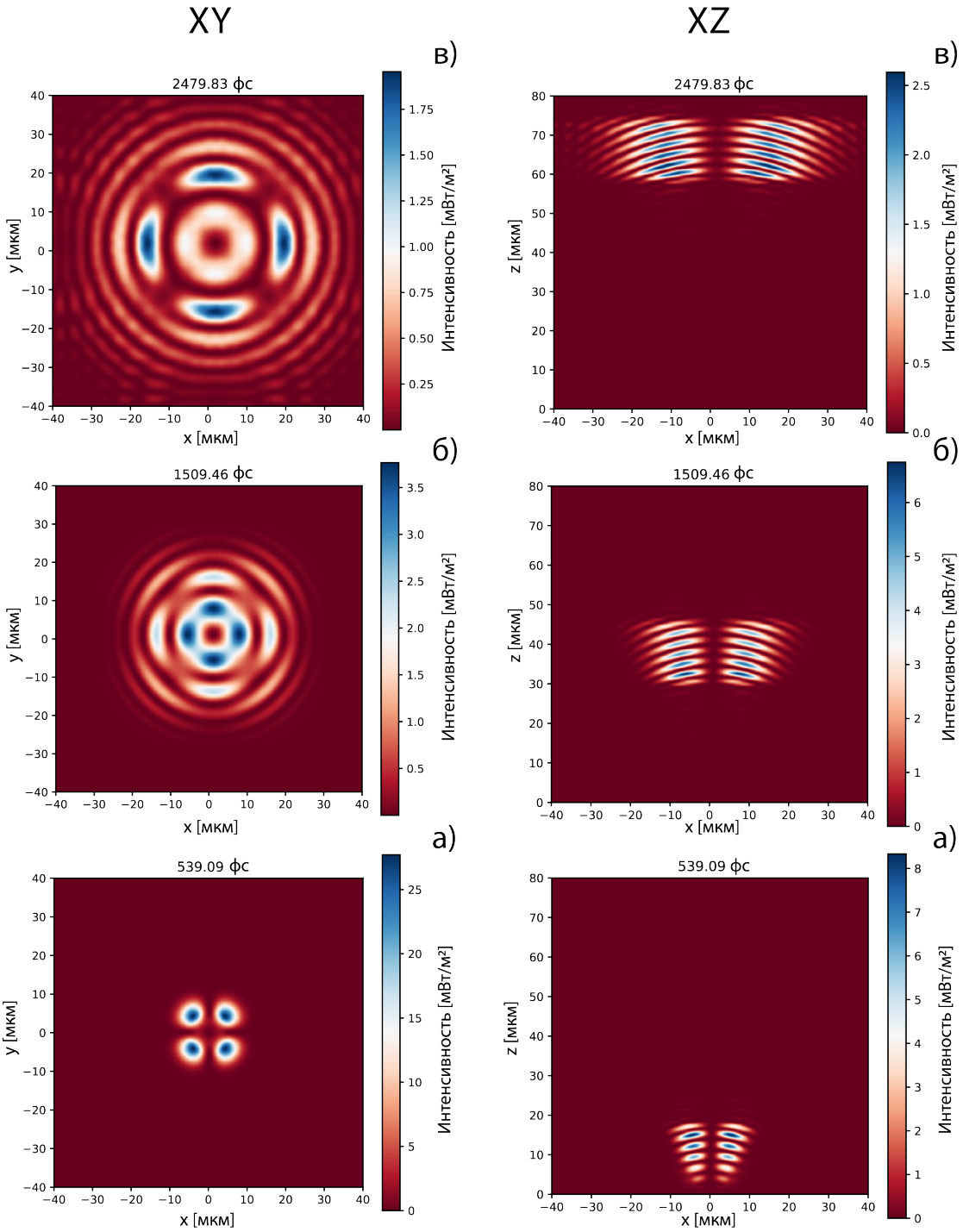

Рисунок А.9 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Эрмит-Гауссова ЭМИ с параметрами $m = 3.387 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $4.634 \cdot 10^{-4}$

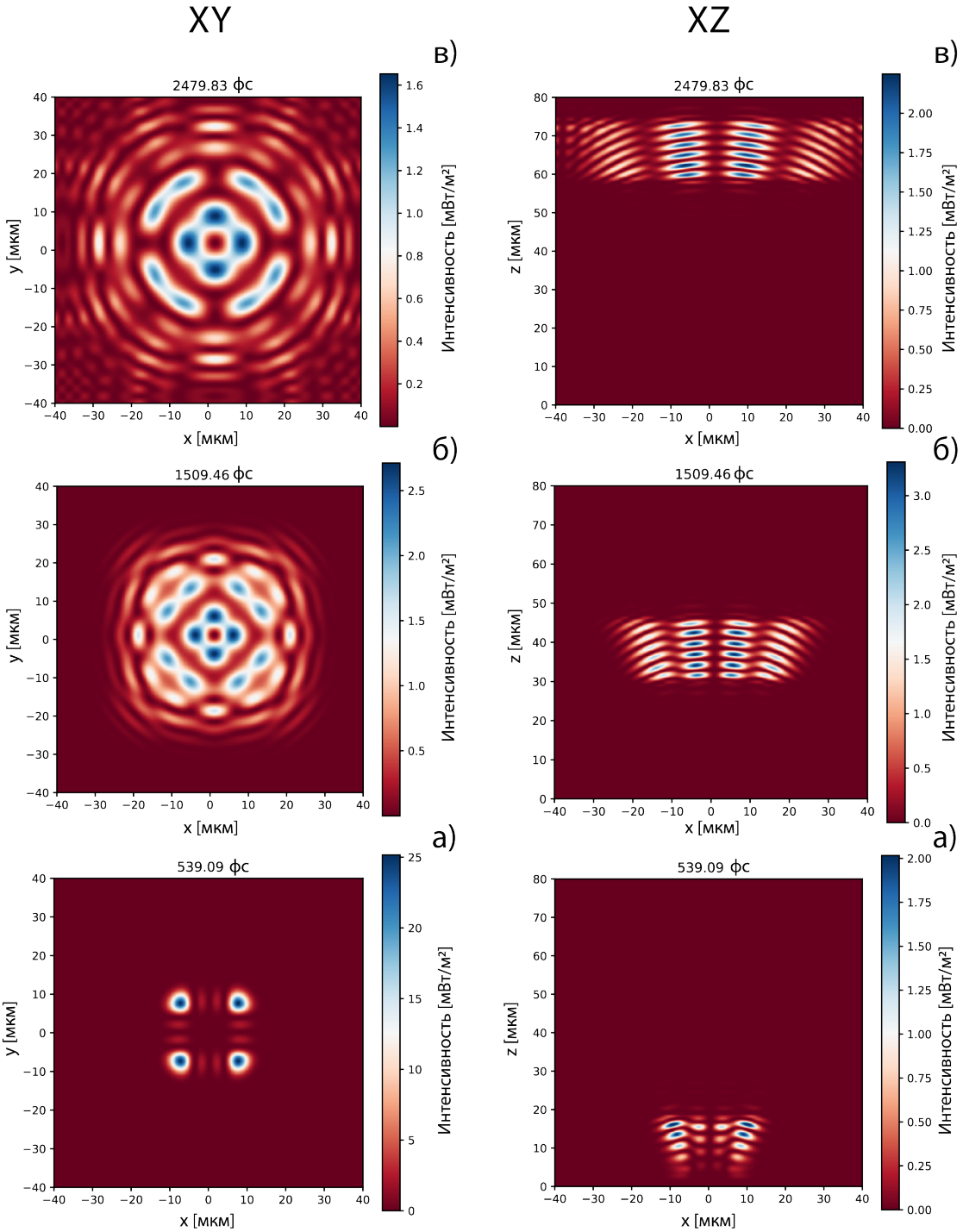

Рисунок А.10 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Эрмит-Гауссова ЭМИ с параметрами $m = 3.562 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $5.126 \cdot 10^{-4}$

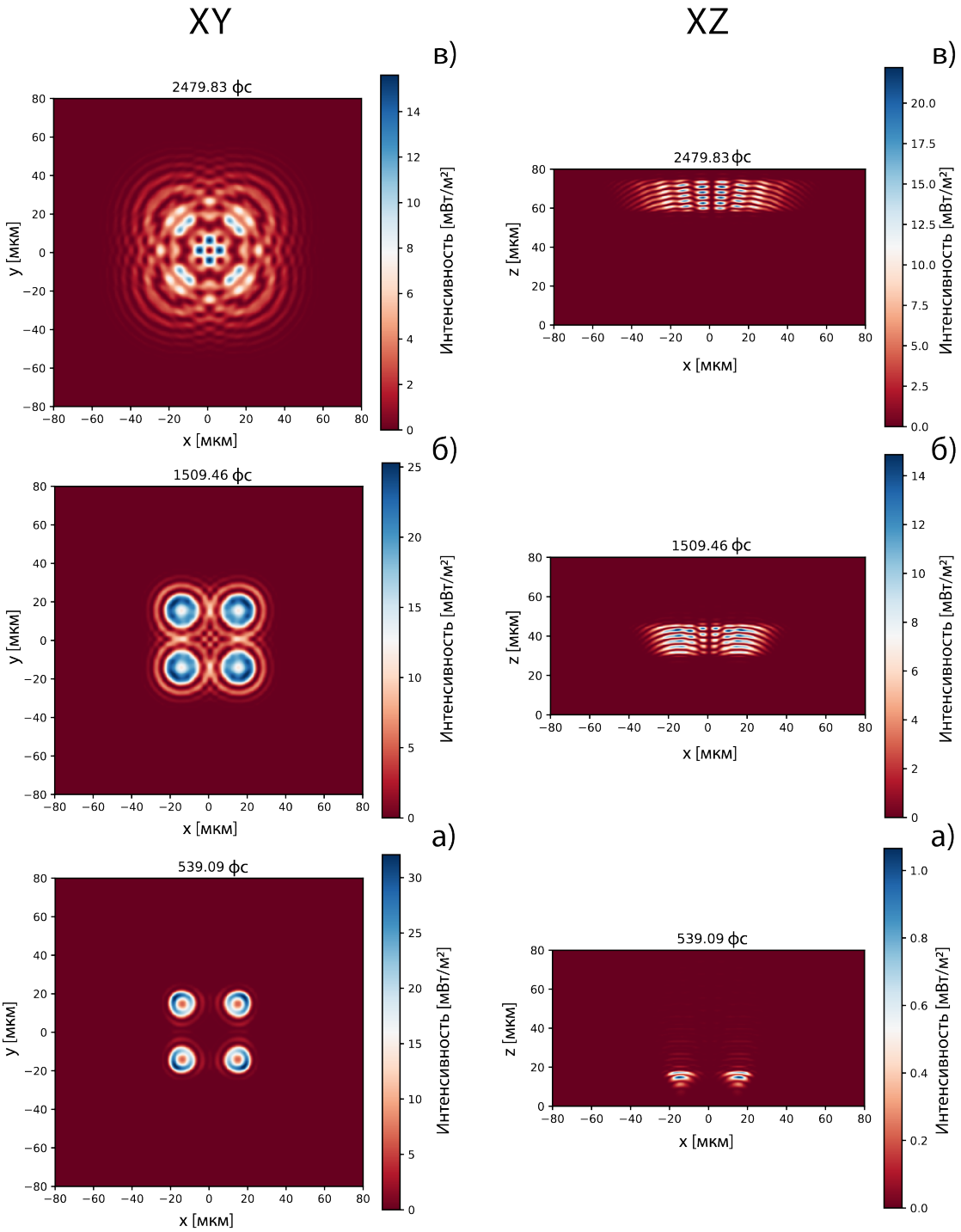

Рисунок А.11 — Моделирование и расчёт ЛИМ, эффекта замедления для Эрмит-Гауссова ЭМИ с параметрами $m = 3.250 \cdot 10^{-18}$г. ; $1 - \frac{v}{c}$: $4.267 \cdot 10^{-4}$